Exercice 1 : **(4 points)** *Commun à tous les candidats*

1. a) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: (– 3, – 4, 1)
Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$: (– 5, 2, – 7)
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc **les points A, B et C ne sont pas alignés.** Ils définissent donc un plan

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times (-3) - 1 \times (-4) - 1 \times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-5) - 1 \times 2 - 1 \times (-7) = -5 - 2 + 7 = 0$
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont pas colinéaires, donc **le vecteur $\overrightarrow{n}$ (1 , – 1 , – 1) est un vecteur normal au plan (ABC).**

c) $\overrightarrow{n}$ (1 , – 1 , – 1) est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation du plan (ABC) est :
$x - y - z + d = 0$ avec d réel.
A ∈ (ABC) donc $1 + 2 - 4 + d = 0$ soit $d = 1$
Une équation du plan (ABC) est : $x - y - z + 1 = 0$

2. a) La droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC) à pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC). Donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de cette droite.
Une représentation paramétrique de la droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et passant par le point O est : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$ **, t ∈ ℝ.**
On notera D cette droite pour la suite de l'exercice.

b) Le point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) est le point d'intersection de la droite D avec le plan (ABC), car D est orthogonale au plan (ABC) et passe par O.

$$O'(x, y, z) = D \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t + t + 1 = 0 \\ x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées du point O' sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$..

a) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HO}).\overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BC} = 0$ car H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
$\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = t\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = t\,\|\overrightarrow{BC}\|^2$ Donc $\mathbf{t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}}$.

b) Coordonnées de $\overrightarrow{BO}$: (2, 6, – 5)
Coordonnées de $\overrightarrow{BC}$: (– 2, 6, – 8)

Donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = 2 \times (-2) + 6 \times 6 + (-5) \times (-8) = -4 + 36 + 40 = 72$

$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (-2)^2 + 6^2 + (-8)^2 = 4 + 36 + 64 = 104$

Donc $\mathbf{t} = \frac{72}{104} = \mathbf{\frac{9}{13}}$

Coordonnées du point $H(x_H , y_H , z_H)$:

Coordonnées de $\overrightarrow{BC}$: (– 2, 6, – 8)
Coordonnées de $\overrightarrow{BH}$: $(x_H + 2, y_H + 6, z_H - 5)$:

Comme $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC} = \frac{9}{13}\overrightarrow{BC}$

On en déduis :

$$\begin{cases} x_H + 2 = \frac{9}{13} \times (-2) \\ y_H + 6 = \frac{9}{13} \times 6 \\ z_H - 5 = \frac{9}{13} \times (-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{18}{13} - 2 \\ y_H = \frac{54}{13} - 6 \\ z_H = -\frac{72}{13} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{44}{13} \\ y_H = -\frac{24}{13} \\ z_H = -\frac{7}{13} \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont : $\left(-\mathbf{\frac{44}{13}}, -\mathbf{\frac{24}{13}}, -\mathbf{\frac{7}{13}}\right)$.

<u>Exercice 2 :</u> (3 points) *Commun à tous les candidats*

Notons les événements :

U : « la boule tirée porte le numéro 1 »
D : « la boule tirée porte le numéro 2 »
R : « la boule tirée est rouge »
V : « la boule tirée est verte »

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges donc $P(U \cap R) = 0{,}2$
Les autres portent le numéro 2 donc $P(D) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes donc $P_D(R) = 0{,}1$ et $P_D(V) = 0{,}9$

1. U et D forment une partition de l'univers, donc en appliquant la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(U \cap R) + P(D \cap R)$
$P(R) = 0{,}2 + P_D(R) \times P(D)$
$P(R) = 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}8$
$P(R) = 0{,}28$
$\mathbf{P(R) = \dfrac{28}{100} = \dfrac{7}{25}}$

2. On cherche à calculer $P_R(D)$

$$\mathbf{P_R(D)} = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}8}{\frac{7}{25}} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{7}{25}} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{2}{25} \times \frac{25}{7} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

Sachant que la boule est rouge, la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est bien $\mathbf{\frac{2}{7}}$.

3. a) L'événement : « obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » est l'événement contraire de « obtenir aucune boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages »
« Obtenir aucune boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » correspond à obtenir une boule portant le numéro 2 dont la probabilité vaut 0,8
Les tirages sont successifs avec remise donc la probabilité de l'événement « obtenir aucune boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » est égale à : $(0{,}8)^n$
Donc la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est égale à $\mathbf{1 - (0{,}8)^n}$

b) On veut : $1 - (0{,}8)^n \geqslant 0{,}99$
$(0{,}8)^n \leqslant 1 - 0{,}99$
$(0{,}8)^n \leqslant 0{,}01$
$\ln (0{,}8)^n \leqslant \ln 0{,}01$ car la fonction ln est une fonction croissante sur $]0\,,+\infty[$.
$n \ln (0{,}8) \leqslant \ln 0{,}01$ car $\ln a^n = n \ln a$
$n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ car $\ln (0{,}8)^n < 0$
$n \geqslant 20{,}63$ $n \geq 21$

L'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99 est 21.

<u>Exercice 3</u> : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. E est le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct donc E est l'image de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc l'affixe z_E du point E est :

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) + z_A$$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) + i = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On a : $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Le point E a bien pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2. Affixe $z_{D'}$ du point D' associé au point D par l'application *f* :

$$z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{2 - 2i - i - 1}{2} = \mathbf{\frac{1 - 3i}{2}}$$

3. a) Pour tout nombre complexe z différent de i :

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z - i}{iz + 1} + 2i\right)(z - i) = \frac{2z - i - 2z + 2i}{iz + 1} \times (z - i) = \frac{i}{iz + 1} \times (z - i)$$

$$(z' + 2i)(z - i) = \frac{i}{i(z - i)} \times (z - i) = 1$$

Pour tout nombre complexe z différent de i, (z' + 2i)(z – i) = 1.

b) Pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) : $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

✓ par passage aux modules :

$$|z' + 2i|\,|z - i| = |1| = 1$$

$|z' + 2i| = |z_{M'} - z_B| = BM'$ et $|z - i| = |z_M - z_A| = AM$

Donc : **$BM' \times AM = 1$**

✓ par passage aux arguments :

$\arg[(z' + 2i)(z - i)] = \arg(z' + 2i) + \arg(z - i) = \arg 1 = k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

$\arg(z' + 2i) = \arg(z_{M'} - z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$

et $\arg(z - i) = \arg(z_M - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Soit **$(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif**

4. a) E est le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct donc E est l'image de D par la rotation de centre A , donc D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon AD.

$$AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$$

Les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

Remarque : On aurait pu calculer la distance AE et vérifier que $AE = \sqrt{2}$

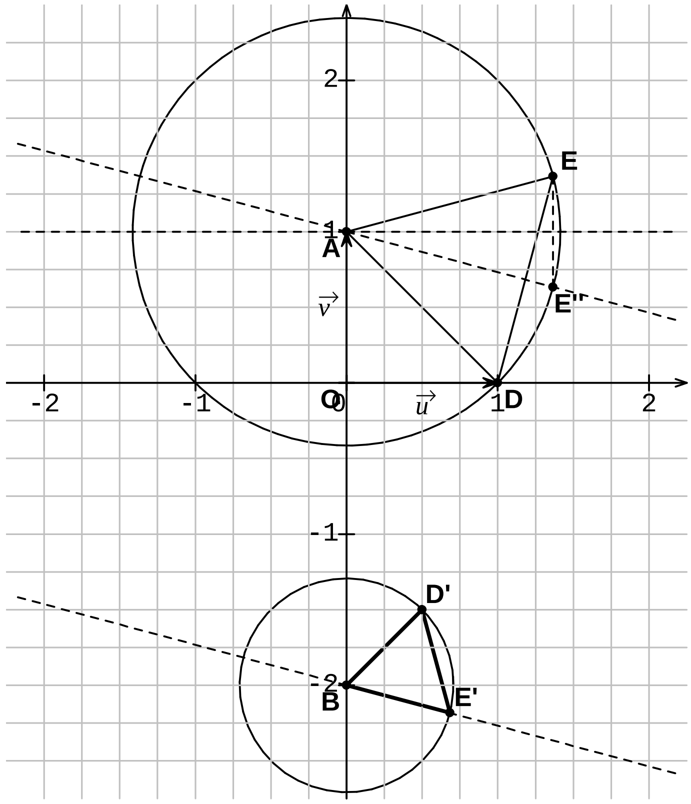
b) E’ est l’image de E par f donc d’après la question 3.b) :

$$BE' \times AE = 1 \text{ soit } \quad BE' = \frac{1}{AE}$$

De même pour le point D’ :

$$BD' \times AD = 1 \text{ soit } \quad BD' = \frac{1}{AD}$$

Comme AD = AE d’après la question 4.a), on en déduit que BE’ = BD’.
Le point E’ appartient donc au cercle de centre B passant par D’.



Construction de E’ :

On tracе la parallèle à l’axe $(O, \overrightarrow{u})$ passant par A.
Puis on construit le point E’’ symétrique du point E par rapport à cette droite.
On a ainsi $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE''}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE})$.

Comme $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$
où k est un entier relatif
alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE''}) + k \times 2\pi$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE'}$ et $\overrightarrow{AE''}$ sont colinéaires et même sens.

Ainsi pour construire le point E’, on trace la parallèle à (AE’’) passant par B elle coupe le cercle de centre B passant par D’ en deux points.
Le point E’ sera le point tel que les vecteurs $\overrightarrow{BE'}$ et $\overrightarrow{AE''}$ soient même sens.

5. Le point E’ appartient au cercle de centre B passant par D’ donc **le triangle BD’E’ est isocèle.**
De plus : $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'})$

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BD'}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'})$

d’après la question 4.a) :

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}) + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$

Donc $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE}) + k \times 2\pi$

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{u}) + k \times 2\pi$

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) + k \times 2\pi$

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \quad (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$ car ADE est equilateral direct

Donc le triangle BD’E’ est isocéle avec un angle de $-\frac{\pi}{3}$, **il est donc équilatéral**

Exercice 3 : (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A

1. $16 \times 1 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$
Le couple (1 ; 4) est une solution particulière de (E).

2. Un couple d'entiers solution de l'équation $16x - 3y = 4$ est (1 ; 4).
Soient (x , y) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $16x - 3y = 4$.

$16x - 3y = 4$
$16x - 3y = 16 \times (1) - 3 \times (4)$
$16(x - 1) = 3(y - 4)$

Or 16 et 3 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

16 divise $(y - 4)$ et 3 divise $(x - 1)$

Il existe donc un entier relatif k tel que : $y - 4 = 16k$ et $x - 1 = 3k$
$y = 16k + 4$ et $x = 3k + 1$

On a démontrer que si (x , y) un couple d'entiers relatifs est solution de l'équation $16x - 3y = 4$ alors il existe un entier relatif k tel que $x = 3k + 1$ et $y = 16k + 4$

Réciproquement : pour tout entier relatif k, le couple $(3k + 1 ; 16k + 4)$ est solution de l'équation $16x - 3y = 4$.
En effet : $16 \times (3k + 1) - 3 \times (16k + 4) = 48k + 16 - 48k - 12 = 4$

Conclusion : L'ensemble des couples $(3k + 1, 16k + 4)$ où k est un entier relatif est solution de (E). »

Partie B

1. L'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = az$ avec $a = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}$.

f est donc une similitude directe de centre O, de rapport $|a| = \sqrt{2}$ et d'angle arg a = $\frac{3\pi}{8}$.

2. a) On sait que la composée de deux similitudes directe de même centre est une similitude directe de même centre qu'elles, de rapport égal au produit des rapports et d'angle égal à la somme des angles.

Donc g est une similitude directe :

de centre O,
de rapport $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$
d'angle : $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

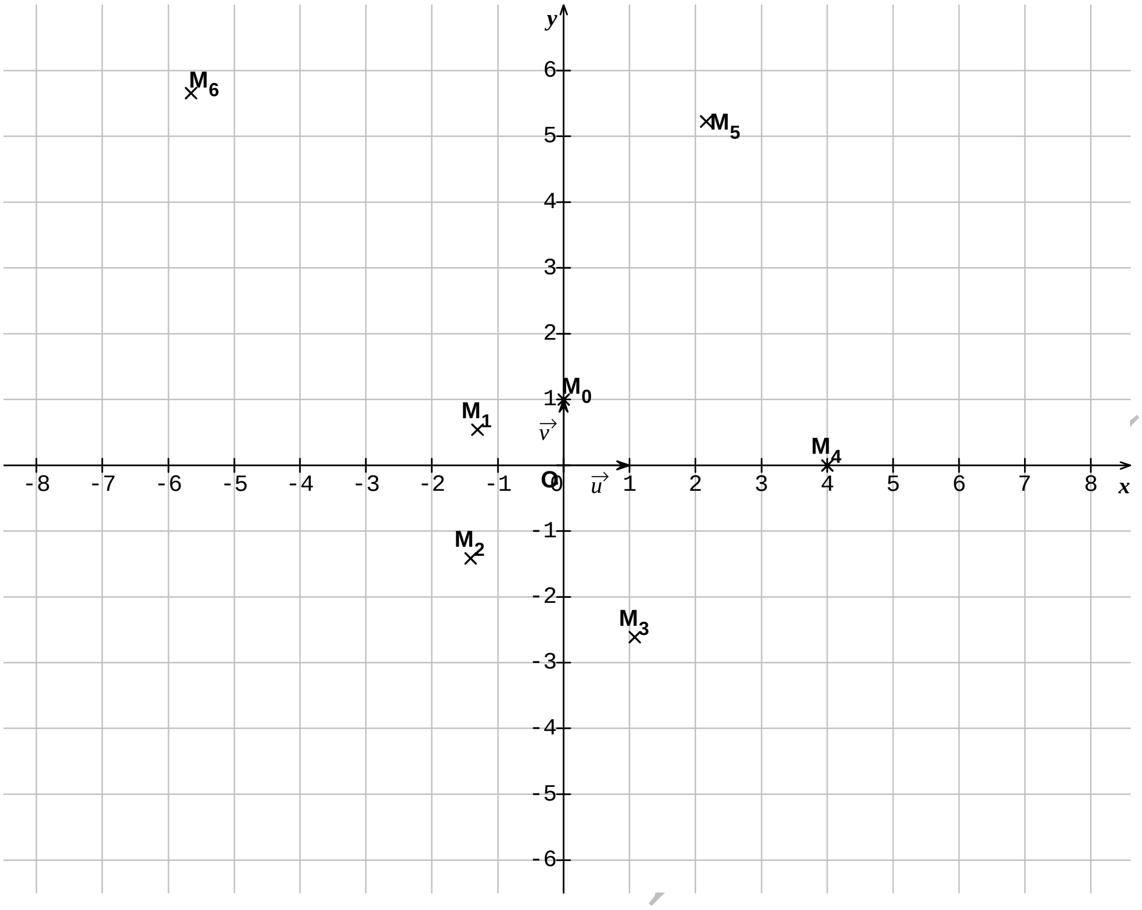
b) Pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = f(M_n)$.

Donc $f \circ f \circ f \circ f(M_n) = f \circ f \circ f(M_{n+1}) = f \circ f(M_{n+2}) = f(M_{n+3}) = M_{n+4}$

Comme g est une similitude directe de centre O, de rapport 4, $-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Donc on en déduit que pour tout entier naturel n, $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c)



3. Démontrons par récurrence la propriété :

pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.

Initialisation : $z_0 = i$ et $\left(\sqrt{2}\right)^0 e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\times 0\times\pi}{8}\right)} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n donné : $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.

Au rang n + 1 : Comme $M_{n+1} = f(M_n)$, on a :

$$z_{n+1} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}}\, z_n$$

$$z_{n+1} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} \times \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$$

$$z_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)}$$

$$z_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi(n+1)}{8}\right)}$$

La propriété est vraie au rang n + 1.

La propriété étant héréditaire et vraie au rang 0 on a donc :

Pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. a) $(\overrightarrow{OM_p},\overrightarrow{OM_n}) = \arg\dfrac{z_n - z_O}{z_p - z_O} = \arg\dfrac{z_n}{z_p} = \arg z_n - \arg z_p$

$$z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)} \text{ donc } \arg z_n = \frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}$$

$$z_p = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3p\pi}{8}\right)} \text{ donc } \arg z_p = \frac{\pi}{2} + \frac{3p\pi}{8}$$

Donc $(\overrightarrow{OM_p},\overrightarrow{OM_n}) = \dfrac{3n\pi}{8} - \dfrac{3p\pi}{8} = \boldsymbol{\dfrac{3\pi}{8}(n-p)}$

b) O, M_p et M_n sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM_p},\overrightarrow{OM_n}) = k\pi$ avec k entier relatif

$\Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{8}(n-p) = k\pi$

$\Leftrightarrow 3(n-p) = 8k$

$\Leftrightarrow 3(n-p) = 8k$

Or 3 et 8 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

8 divise $(n-p)$ donc $n - p$ est un multiple de 8.

Donc les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

5. $M_n \in [Ox)$ $\Leftrightarrow$ $\arg z_n = 2k\pi$ avec k entier relatif

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3n\pi}{8} = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{3n}{8} = 2k$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+3n}{8} = 2k$

$\Leftrightarrow 4 + 3n = 16k$

$\Leftrightarrow 16k - 3n = 4$

$\Leftrightarrow$ d'après la partie A : $n = 16k' + 4$ avec k' entier naturel (naturel et non relatif car n est un entier naturel)

Donc l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite [Ox) est l'ensemble $\{16k' + 4, k' \in \mathbb{N}\}$

<u>Exercice 4 :</u> (8 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$.

1. Pour tout réel x : $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7} = \dfrac{4e^x}{e^x(1 + 7e^{-x})} = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

2. a) Limite de f_1 en $-\infty$: $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 4e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 7) = 7$

Donc par quotient : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$.

La courbe C_1 admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de – ∞.

Limite de f_1 en $+\infty$: $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Donc par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 7e^{-x}) = 1$

Donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 4$

La courbe C_1 admet une asymptote horizontale d'équation y = 4 au voisinage de + ∞.

b) La fonction f_1 est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f_1(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4e^x$ et $v(x) = e^x + 7$

$u'(x) = 4e^x$ et $v'(x) = e^x$

$$f_1'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{4e^x(e^x + 7) - 4e^x \times e^x}{(e^x + 7)^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{28e^x}{(e^x + 7)^2}$$

Sur $\mathbb{R}$: $e^x > 0$, donc $f_1'(x) > 0$.

Donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f_1 est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 4$

On en déduit que : **pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.**

3. a) Rappel : Le point A(a, b) est un centre de symétrie d'une courbe (C) représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I, si et seulement si, pour tout réel h tel que a + h et a – h appartiennent à I on a : $f(a + x) + f(a - h) = 2b$

Pour tout réel x :

$$f_1(\ln 7 + x) = \frac{4e^{(\ln 7 + x)}}{e^{(\ln 7 + x)} + 7} = \frac{4e^{\ln 7} \times e^x}{e^{\ln 7} \times e^x + 7} = \frac{4 \times 7e^x}{7e^x + 7} = \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

$$f_1(\ln 7 - x) = \frac{4e^{(\ln 7 - x)}}{e^{(\ln 7 - x)} + 7} = \frac{4e^{\ln 7} \times e^{-x}}{e^{\ln 7} \times e^{-x} + 7} = \frac{4 \times 7e^{-x}}{7e^{-x} + 7} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}(1 + e^x)} = \frac{4}{e^x + 1}$$

Donc : $f_1(\ln 7 + x) + f_1(\ln 7 - x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 1} + \dfrac{4}{e^x + 1} = \dfrac{4(e^x + 1)}{e^x + 1} = 4 = 2 \times 2$

Donc **le point I_1 de coordonnées (ln 7, 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.**

b) Equation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 :

$$y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$$

$$f_1'(\ln 7) = \frac{28e^{\ln 7}}{(e^{\ln 7} + 7)^2} = \frac{28 \times 7}{(7 + 7)^2} = 1$$

$$f_1(\ln 7) = \frac{4e^{\ln 7}}{e^{\ln 7} + 7} = \frac{4 \times 7}{7 + 7} = 2$$

Une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 est : $y = x - \ln 7 + 2$.

c) Voir figure en fin d'exercice

4. a) Pour tout réel x : $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$.

avec $u(x) = e^x + 7$ et $u'(x) = e^x$

$$f_1(x) = 4\,\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Donc une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est $F_1(x) = 4 \ln \left| e^x + 7 \right| = 4 \ln (e^x + 7)$.

b) Valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 , ln 7] :

$$\mu = \frac{1}{\ln 7 - 0} \int_0^{\ln 7} f_1(x)dx = \frac{1}{\ln 7} \left[4 \ln\left(e^x + 7\right)\right]_0^{\ln 7} = \frac{4}{\ln 7} [\ln (7 + 7) - \ln (1 + 7)]$$

$$\mu = \frac{4}{\ln 7} (\ln 14 - \ln 8) = \frac{4}{\ln 7} \ln \frac{14}{8} = \frac{4}{\ln 7} \ln \frac{7}{4} = \frac{4}{\ln 7} (\ln 7 - \ln 4) = 4\left(1 - \frac{\ln 4}{\ln 7}\right)$$

La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 , ln 7] est $\mu = 4\left(1 - \dfrac{\ln 4}{\ln 7}\right)$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n

1. Pour tout entier naturel n non nul : $f_n(0) = \dfrac{4e^0}{e^0 + 7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Donc pour tout entier naturel n non nul le point A$\left(0\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. a) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} f_n(x) = 2 \quad & \Leftrightarrow \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} = 2 \\ & \Leftrightarrow 4e^{nx} = 2e^{nx} + 14 \\ & \Leftrightarrow 2e^{nx} = 14 \\ & \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \\ & \Leftrightarrow nx = \ln 7 \text{ car la fonction ln est croissante sur }]0\,;+\infty[. \\ & \Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{n} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation y = 2 ont un unique point d'intersection I_n de coordonnées $\left(\dfrac{\ln 7}{n}\,,\,2\right)$.

b) Equation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n :

$$y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$$

$$f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = \frac{4e^{\ln 7}}{e^{\ln 7} + 7} = \frac{4 \times 7}{7 + 7} = 2$$

La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f_n'(x) = \dfrac{4ne^{x}\,(e^{nx} + 7) - 4e^{nx} \times e^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2} = \dfrac{28ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}$

Donc $f_n'\left(\dfrac{\ln 7}{n}\right) = \dfrac{28ne^{\ln 7}}{(e^{\ln 7} + 7)^2} = \dfrac{28n \times 7}{(7 + 7)^2} = n$

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n est : y = nx – ln 7 + 2.

c) Voir figure en fin d'exercice

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$.

Pour tout réel x : $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$.

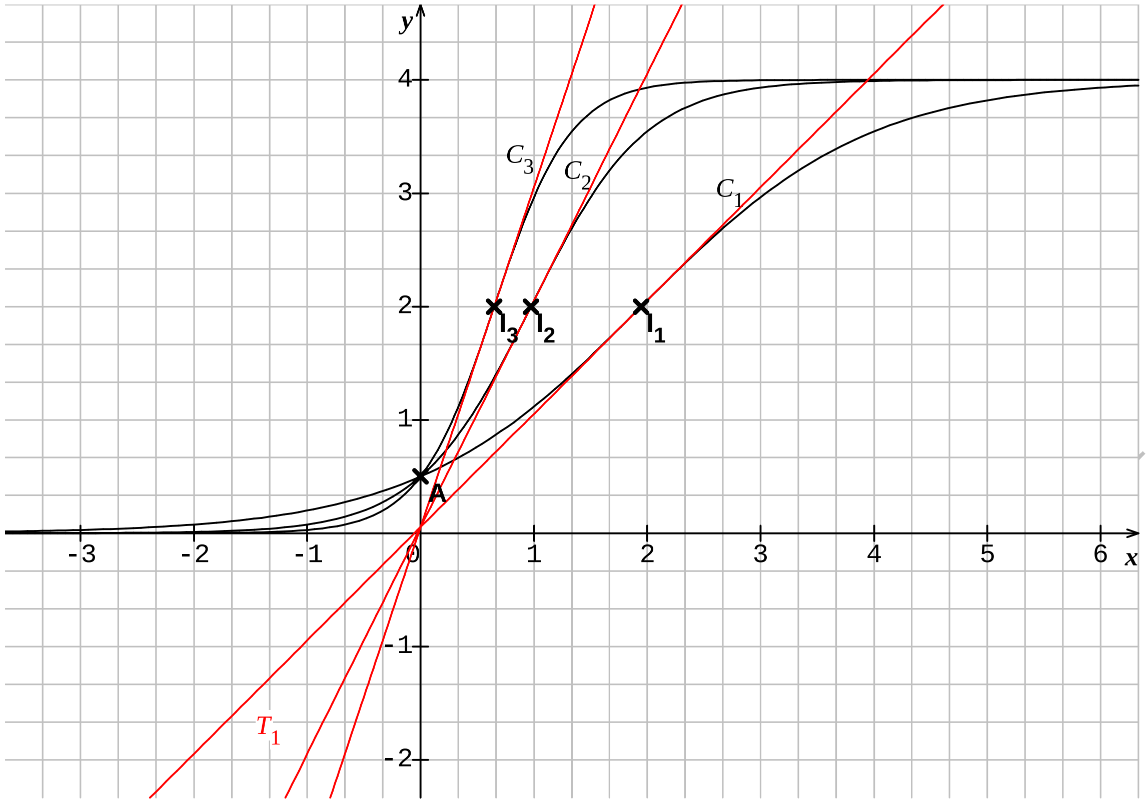
avec $u(x) = e^{nx} + 7$ et $u'(x) = ne^{nx}$

$f_1(x) = \dfrac{4}{n}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc une primitive de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est $F_n(x) = \dfrac{4}{n}\ln\left|e^{nx} + 7\right| = \dfrac{4}{n}\ln(e^{nx} + 7)$.

Donc : $u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx = \dfrac{n}{\ln 7}\left[\dfrac{4}{n}\ln(e^{nx}+7)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} = \dfrac{4}{\ln 7}\,[\ln(7 + 7) - \ln(1 + 7)] = 4\left(1 - \dfrac{\ln 4}{\ln 7}\right)$

u_n ne dépend pas de n donc **la suite (u_n) est constante.**



y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
C3
C2
C1
I3
I2
I1
A
T1