Spécialité mathématiques – Terminale Voie Générale
Épreuve de mathématiques
Sujet B
Durée : 4 heures

EXERCICE 1 (5 points)

Ce QCM comprend 5 questions. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit P le plan dont on donne la représentation paramétrique suivante :

$$\{x = 4 + 2t + 2t^{'}\ y = -4t + 6t^{'}\ \ z = -4 + 2t - 10t'\ avec\ t \in R\ et\ t' \in R$$

Parmi les points suivants, lequel n'appartient pas au plan P ?

a. $A(6;-4;-2)$	b. $B(2;-6;6)$	c. $C(8;-2;-12)$	d. $D(4;-10;8)$

Question 2
Soit f une fonction définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère. Sachant que $f(x) = 2\ 021$, quelle proposition est vraie ?

a. $f(x) = 2\ 021$	b. $f(x) = -2\ 021$	c. $f(x) = 1$	d. $f(x) = 0$

Question 3
Dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $e^{3x} - 1 = 9e^{-3x}$ admet :

a. aucune solution	b. une unique solution $x > ln(\sqrt{3})$	c. une unique solution $x < ln(\sqrt{3})$	d. deux solutions opposées

Question 4
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_7 = 12$ et $u_{11} = 7,2$. Que vaut la raison r de cette suite ?

a. $r = -1,2$	b. $r = 1,2$	c. $r = -1,4$	d. $r = -0,8$

Question 5

Soient (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -10$ et de raison 2, (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 2 et (w_n) la suite définie sur N par $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$. La somme $u_9 + v_9 + w_9$ est égale à :

a. 1 560	b. 780	c. 520	d. 260

EXERCICE 2 (5 points)

Partie I

Soit f la fonction définie et dérivable sur R telle que, pour tout réel x, on a : $f(x) = x + 2x^2 - x^3$.

1. a. Étudier les variations de la fonction f .
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
2. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans R .
   b. Donner la valeur exacte ou un encadrement de cette solution α à 10^{-2} près.
   c. En déduire le signe de f sur R .

Partie II

Soit g la fonction définie et dérivable sur R telle que, pour tout réel x, on a :

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x+2}$$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur R et C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que $g(x) = -\infty$.
2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a : $1 < x < x^2 < x^3$.
   b. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a : $0 < g(x) < 4x^3e^{-x+2}$.
   c. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :
   $$x^n e^{-x} = 0 .$$
   Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3e^{-x+2} = 4e^2x^3e^{-x}$ puis montrer que $4x^3e^{-x+2} = 0$.
   d. En déduire la limite de g en $+\infty$. Donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que, pour tout x de R, on a $g'(x) = f(x)e^{-x+2}$.
4. À l'aide des résultats de la partie I, dresser le tableau de variation de la fonction g sur R .

EXERCICE 3 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

1. On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.
   Démontrer que la fonction h admet un minimum.
   En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \sqrt{5}$.
2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la variation de la suite (u_n) .
   b. En déduire que la suite converge.

c. Justifier le fait que la limite l de cette suite vérifie l'équation $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{5}{l}\right)$. Déterminer l.

3. Déterminer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{5}\right)^2}{u_n}.$$

4. On définit la suite (v_n) par $v_0 = 1$ et pour, tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{2}{v_n}^2$.

   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n - \sqrt{5} \leq v_n$.

   b. Voici un script Python :

```
from math import exp
def suite(k):
    v=1
    n=0
    while v>10**(-k):
        v=0.5*v*v
        n=n+1
    return n
```

   En exécutant suite(8), l'algorithme affiche 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour v_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-8} près.

EXERCICE 4 (4 points)

Lors d'un concours pour entrer dans une grande école, Lucie doit passer une épreuve orale devant un jury et une épreuve écrite comportant un QCM.

Partie I

Le jury devant lequel Lucie passera son épreuve orale est composé de cinq personnes choisies au hasard parmi douze hommes et dix femmes.

1. Combien y a-t-il de jurys possibles composés uniquement de femmes ?
2. Combien y a-t-il de jurys possibles composés de deux femmes et trois hommes ?
3. Combien y a-t-il de jurys possibles composés d'au moins une femme ?
4. Corentin est l'un des douze hommes du jury. Combien y a-t-il de jurys dont Corentin pourrait être membre ?

Partie II

Son épreuve écrite est composée d'un QCM de vingt questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Parmi elles, une seule est correcte. On considère que Lucie répond au hasard aux vingt questions et que ses réponses sont indépendantes des unes des autres. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que Lucie réponde correctement à exactement 10 questions ? Arrondir à 10^{-3} près.
3. Sachant que chaque bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse erronée n'ajoute ni n'enlève de point, déterminer la note moyenne sur vingt que Lucie peut espérer obtenir.

Correction

EXERCICE 1 (5 points)

Question 1

On résout les systèmes d'équations avec les coordonnées de quatre points proposés. Ainsi, on a :

Si $t = 1$ et $t' = 0$ alors $x = 4 + 2 + 0 = 4$; $y = -4 + 0 = -4$ et $z = -4 + 2 - 0 = -2$ donc $A \in P$.

Si $t = 0$ et $t' = -1$ alors $x = 4 + 0 - 2 = 2$; $y = 0 - 6 = -6$ et $z = -4 + 0 + 10 = 6$ donc $B \in P$.

Si $t = 1$ et $t' = -1$ alors $x = 4 + 2 - 2 = 4$; $y = -4 - 6 = -10$ et $z = -4 + 2 + 10 = 8$ donc $C \in P$.

Réponse c.

Question 2

La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère, ce qui signifie que la fonction est impaire. Donc pour tout $x \in R$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Ainsi, $f(x) = f(-x) = -f(x) = -f(x) = \quad -2\ 021$

Réponse b.

Question 3

$$e^{3x} - 1 = 9e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{e^{3x-1}}{e^{-3x}} = 9 \Leftrightarrow e^{3x}(e^{3x} - 1) = 9 \Leftrightarrow (e^{3x})^2 - e^{3x} - 9 = 0$$

En posant $X = e^{3x}$, on obtient une équation du second degré : $X^2 - X - 9 = 0$

On résout cette équation en calculant $\Delta = b^2 - 4a = 37$. Cette équation admet deux racines $X_1 = \frac{1+\sqrt{37}}{2}$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{37}}{2}$.

Comme $X = e^{3x}$ alors $x = \frac{ln(X)}{3}$. Étant donné que X_2 est négatif alors l'équation initiale n'admet qu'une seule solution : $x = \frac{ln(\frac{1+\sqrt{37}}{2})}{3}$ qui est supérieure à $\sqrt{3}$.

Réponse b.

Question 4

(u_n) est une suite arithmétique alors $u_n = u_p + (n-p) \times r$. Ici, $u_{11} = u_7 + (11-7) \times r$

$$\Leftrightarrow 7,2 = 12 + 4r \Leftrightarrow -4,8 = 4r \Leftrightarrow r = \frac{-4,8}{4} = -1,2$$

Réponse a.

Question 5

(u_n) est une suite arithmétique donc $u_n = u_0 + n \times r$ donc $u_9 = -10 + 9 \times 2 = 8$

(v_n) est une suite géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_9 = 1 \times 2^9 = 512$

$w_9 = \frac{u_9 + v_9}{2} = \frac{8+512}{2} = 260$

$u_9 + v_9 + w_9 = 8 + 512 + 260 = 780$

Réponse b

EXERCICE 2 (5 points)

Partie I

1. a. $f'(x) = 1 + 4x - 3x^2$

   On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 28$ donc $x_1 = \frac{-4-\sqrt{28}}{-6} = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{28}}{-6} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$.

   $f'(x)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines donc f est décroissante sur $]-\infty; \frac{2-\sqrt{7}}{3}]$ et sur $[\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty[$ et est croissante sur $[\frac{2-\sqrt{7}}{3}; \frac{2+\sqrt{7}}{3}]$.

b. $f(x) = x^3(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1)$

$$x^3 \ =- \infty \ \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 \ =- 1 \ \} \ par\ produit\ f(x) \ =+ \infty$$
$$x^3 \ =+ \infty \ \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 \ =- 1 \ \} \ par\ produit\ f(x) \ =- \infty$$

2. a.

	↘	↗	↘

$$f(x_2) = \frac{34-14\sqrt{7}}{27} \approx -0,11 \quad et \quad f(x_1) = \frac{34+14\sqrt{7}}{27} \approx 2,63$$

Sur l'intervalle $]-\infty; \frac{2-\sqrt{7}}{3}]$, la fonction est continue et strictement décroissante de plus, $0 \in [\frac{34-14\sqrt{7}}{27}; +\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que l'équation $f(x) = 0$.

On procède de la même manière sur les intervalles $[\frac{2-\sqrt{7}}{3}; \frac{2+\sqrt{7}}{3}]$ .et $[\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty[$.

b. En effectuant un balayage à l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$-0,42 < \alpha_1 < -0,41 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad 2,41 < \alpha_3 < 2,42$$

$c.$ On en déduit

	+	−	+	−

Partie II

Soit g la fonction définie et dérivable sur R telle que, pour tout réel x, on a :

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x+2}$$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur R et C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. $1 + x + x^2 + x^3 = x^3(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1)$

$$x^3 \ =- \infty \ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \ = 1 \ \} \ par\ produit\ on\ a 1 + x + x^2 + x^3 \ =- \infty$$

Par composition : $e^{-x+2} = \ e^X = +\infty$

Par produit $g(x) \ =- \infty$.

2. a. Pour tout $x > 1$, en multipliant par x qui est positif on a $x^2 > x$ et donc $x^2 > x > 1$.
En multipliant à nouveau par x qui est positif les inégalités, on a $x^3 > x^2 > x$
donc $1 < x < x^2 < x^3$.
b. Ainsi $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < x^3 + x^3 + x^3 + x^3$ donc $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$.
En multipliant par e^{-x+2} qui est un nombre strictement positif on a $0 < g(x) < 4x^3e^{-x+2}$
c. $4x^3e^{-x+2} = 4x^3e^{-x}e^2 = 4e^2x^3e^{-x}$
Or, $x^3e^{-x} = 0$ donc

3. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a : $1 < x < x^2 < x^3$.
b. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a : $0 < g(x) < 4x^3e^{-x+2}$.
c. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$x^n e^{-x} = 0 .$$
Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3e^{-x+2} = 4e^2x^3e^{-x}$ puis montrer que $4x^3e^{-x+2} = 0$.

d. Comme $4x^3e^{-x+2} = 0$ et pour tout $x > 1$, on a $g(x) < 4x^3e^{-x+2}$ d'après un théorème de comparaison, on en déduit que $g(x) = +\infty$.

4. $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x+2}$
$g'(x) = (1 + 2x + 3x^2)\,e^{-x+2} + (1 + x + x^2 + x^3)\,(-1)\,e^{-x+2}$
$g'(x) = e^{-x+2}(1 + 2x + 3x^2 - 1 - x - x^2 - x^3)$
$g'(x) = e^{-x+2}(x + 2x^2 - x^3)$
$g'(x) = f(x)e^{-x+2}$

5. Une exponentielle est toujours strictement positive donc $g'(x)$ est du signe de $f(x)$.

	$+$	$-$	$+$	$-$

EXERCICE 3 (6 points)

1. $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$ sur $]0;+\infty[$
$h'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{5}{x^2} \Leftrightarrow x^2 > 5 \Leftrightarrow x > \sqrt{5}$$

h est donc croissante sur $[\sqrt{5};+\infty[$ et décroissante sur $]0;\sqrt{5}]$. Donc h admet un minimum quand $x = \sqrt{5}$.
Comme h admet un minimum quand $x = \sqrt{5}$ cela signifie que $h(x) > h(\sqrt{5})$ pour tout $x > 0$.

$$h(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$$

On en déduit que : comme $u_{n+1} = h(u_n)$ alors $u_n > \sqrt{5}$.

2. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - \frac{1}{2}\times 2u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n} - 2u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n} - u_n\right)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5-u_n{}^2}{u_n}\right)$$

Comme $\frac{1}{2}$ est strictement positif, $u_n > 0$ et comme $u_n > \sqrt{5}$ donc $u_n{}^2 > 5$ donc $5 - u_n{}^2 < 0$.
On en conclut que $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
b. On sait que la suite est décroissante et qu'elle est minorée par $\sqrt{5}$ donc d'après le théorème de convergence monotone, on peut en déduire que la suite converge.
c. Par unicité de la limite, $u_{n+1} = u_n$ ainsi $\frac{1}{2}\left(l + \frac{5}{l}\right) = l$.
$l + \frac{5}{l} = 2l \Leftrightarrow l = \frac{5}{l} \Leftrightarrow l^2 = 5 \Leftrightarrow l = \sqrt{5}$ puisque la limite est positive.

3. $u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n} - 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n{}^2+5-2\sqrt{5}u_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{5})^2}{u_n}$

4. a. Initialisation :
$u_0 - \sqrt{5} = 3 - \sqrt{5} \approx 0,77$ donc $u_0 - \sqrt{5} < v_0$ car $v_0 = 1$.
La propriété est vraie au rang initial.
<u>Hérédité :</u>
On suppose que $u_k - \sqrt{5} \leq v_k$. Montrons que $u_{k+1} - \sqrt{5} \leq v_{k+1}$.
On a montré que
$$u_{k+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\frac{(u_k - \sqrt{5})^2}{u_k}$$
Donc comme $u_k - \sqrt{5} \leq v_k$ alors $(u_k - \sqrt{5})^2 \leq {v_k}^2$.
Comme $u_k > \sqrt{5}$ alors $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$.
Ainsi $u_{k+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\frac{(u_k - \sqrt{5})^2}{u_k} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{u_k} \times {v_k}^2 \leq \frac{1}{2}{v_k}^2$ donc $u_{k+1} - \sqrt{5} \leq v_{k+1}$.
La propriété est héréditaire.
Conclusion :
La propriété étant vraie au rang initial et étant héréditaire alors pour tout entier naturel n, on a : $u_n - \sqrt{5} \leq v_n$.
b. L'algorithme indique que $v_n \leq 10^{-8}$ il faut que $n \geq 5$.
On a donc $v_5 \leq 10^{-8}$. Comme $u_5 - \sqrt{5} < v_5$ alors $u_5 - \sqrt{5} < 10^{-8}$. On en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{5}$ à 10^{-8} près.

Exercice 4 (4 points)

Partie I

1. On cherche le nombre de combinaisons de 5 éléments distincts choisis parmi 10 : $\binom{10}{5} = 252$.
2. On cherche le nombre de combinaisons de 2 éléments distincts choisis parmi 10 : $\binom{10}{2} = 45$ et le nombre de combinaisons de 3 éléments distincts choisis parmi 12 : $\binom{12}{3} = 220$.
   D'après le principe multiplicatif, il y a $45 \times 220 = 9\,900$ jurys possibles.
3. Nombre total de jurys possibles : $\binom{22}{5} = 26\,334$.
   Le nombre de jurys comportant que des hommes est : $\binom{12}{5} = 792$
   Par le principe additif, $26\,334 - 792 = 25\,542$ jurys seront composés au moins d'une femme.
4. On cherche le nombre de combinaisons de 4 éléments distincts choisis parmi 21 : $\binom{21}{4} = 5\,985$. Il y a $5\,985$ jurys dont Corentin pourrait être membre.

Partie II

1. Lucie répond au hasard à une question, la probabilité qu'elle choisisse la bonne réponse est égale à $\frac{1}{4}$. Cette épreuve est donc une épreuve à deux issues, il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli. Elle répète cette expérience 20 fois de suite de manière identique et indépendante. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de bonnes réponses. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,25$.
2. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par :
$$P(X = k) = \binom{k}{n} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Ici, $P\ (X = 10) = (20\ 10\ ) \times 0,25^{10} \times 0,75^{10} \approx 0,01$

3. On calcule l’espérance de X. Comme X suit une loi binomiale alors $E\ (X) = np = 20{\times}0,25 = 5$.
   Si Lucie répond totalement au hasard, elle peut espérer avoir en moyenne la note de 5/20.