

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. $e^{1-x} = e \times e^{-x} = \frac{e}{e^x}$ donc $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ (par composition).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty \text{ (par produit)}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{x}{e^x} = 0$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ce qui veut dire que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x(-1) e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

5. Pour tout réel x , $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

$f(1) = 1e^0 = 1$, d'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur \mathbb{R} par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}.$$

1. $(1-x)g_n(x) = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$
 $= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$
 $-x-x^2-x^3-\dots-x^n-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. Pour tout x , $g_n(x) = 1+x+x^2+\dots+x^n$ donc $g'_n(x) = 0+1+2x+\dots+nx^{n-1} = h_n(x)$.

Or, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;

g_n est une fonction rationnelle de type $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$h_n(x) = g'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, où $f(x) = xe^{1-x}$.

$$S_n = 1 + 2e^{-1} + \dots + ne^{1-n} = 1 + 2e^{-1} + \dots + n(e^{-1})^{n-1} = h_n(e^{-1}).$$

$$\text{Or } h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \text{ donc } h_n(e^{-1}) = \frac{n(e^{-1})^{n+1} - (n+1)(e^{-1})^n + 1}{(1-(e^{-1}))^2};$$

$$S_n = \frac{\frac{n}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ comme limites en $+\infty$ de fonctions rationnelles,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

$$\frac{n}{e^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}}; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\frac{n+1}{e^n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n}; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}.$$

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées (0, 0, 0), B (1, 0, 0), D (0, 1, 0) et E (0, 0, 1).

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ donc le point F a pour coordonnées } (1, 0, 1).$$

La droite (FD) a pour vecteur directeur \overrightarrow{DF} de coordonnées (1, -1, 1); de plus elle passe par le point D (0, 1, 0).

$$\text{La droite (FD) a pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

2. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées (1, -1, 1). Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs \overrightarrow{EB} et \overrightarrow{EG} directeurs du plan (BGE).

$$\overrightarrow{EB} \text{ a pour coordonnées } (1, 0, -1); \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EB}.$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ a pour coordonnées } (1, 1, 0); \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{EG}.$$

Donc le vecteur \vec{n} (1, -1, 1) est normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) a pour vecteur normal \vec{n} et passe par le point B; c'est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $\vec{n} \perp \overrightarrow{BM}$.

$$\overrightarrow{BM} \text{ a pour coordonnées } (x-1, y, z);$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1 \times (x-1) + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \iff x - y + z - 1 = 0.$$

L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z - 1 = 0$.

3. Le vecteur \overrightarrow{DF} est égal au vecteur \vec{n} qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Les coordonnées (x, y, z) du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ t - (1 - t) + t - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ 3t = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc $BE = EG = BG = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a , la hauteur est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur $BH = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BEG vaut $\frac{EG \times BH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Le volume d'un tétraèdre est $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\frac{\text{aire}(\text{BEG}) \times KD}{3}$.

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$$KD^2 = (x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9}$$

$$\text{donc } KD = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Le volume du tétraèdre est donc : $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercice 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. On résout l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$; $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$.

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z' = \frac{-(-2\sqrt{3}) + i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i \text{ et } z'' = \sqrt{3} - i.$$

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.

a. $z_1 = 2^1 e^{i(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - i = z''$

Donc z_1 est solution de l'équation (E).

b. $z_2 = 2^2 e^{i(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

$z_3 = 2^3 e^{i(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 4\sqrt{3} - 4i$

- c. $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y = -1$.

Pour placer le point M_2 , on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\text{Im}(z_2) = 2$.

Pour placer le point M_3 , on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\text{Im}(z_3) = -4$.

$z_4 = 2^4 e^{i(-1)^4 \frac{\pi}{6}} = 16 e^{i \frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4 , on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $\arg(z_4) = \frac{\pi}{6} = \arg(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$.

Voir la figure en annexe.

Si $n \geq 1$ et n pair, $(-1)^n = +1$, donc $e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}$.

Donc si $n \geq 1$ pair, $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

Si n impair, $(-1)^n = -1$, donc $e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = e^{i \frac{-\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}$.

Donc si n impair, $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}} = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

Donc pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad M_1 M_2 &= |z_2 - z_1| = |2\sqrt{3} + 2i - (\sqrt{3} - i)| = |2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} + 3i| \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 M_3 &= |z_3 - z_2| = |4\sqrt{3} - 4i - (2\sqrt{3} + 2i)| = |4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 6i| \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2^2 \sqrt{3} \end{aligned}$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$.

a. D'après la question 4, $\ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \dots + 2^n\sqrt{3} = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3}$

La suite (2^n) définie pour $n \geq 1$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$\text{donc } 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$$\ell_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$$

$$\mathbf{b.} \quad \ell_n \geq 1000 \iff 2\sqrt{3}(2^n - 1) \geq 1000 \iff 2^n - 1 \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geq \frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1.$$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\ell_n \geq 1000 \iff \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \iff n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)$$

Or $\ln 2 > 0$ donc

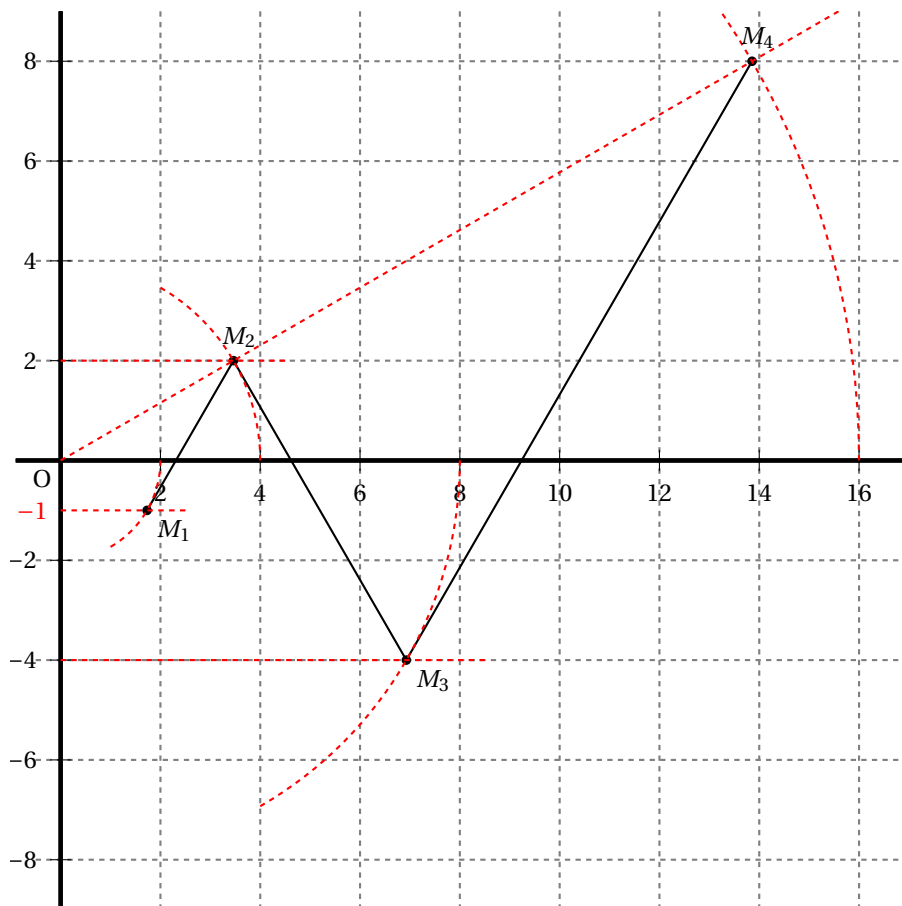
$$\ell_n \geq 1000 \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \iff n \geq 8,18.$$

Le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$ est 9.

On peut vérifier que $\ell_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000$ et $\ell_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$.

ANNEXE
À rendre avec la copie

Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Exercice 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$$

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 (événement A_n), il ne reste pas sur cette page donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$.

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 (événement B_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 (événement C_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

De plus $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

$$\text{Donc } a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$$

On aurait pu aussi construire un arbre pondéré pour représenter la situation.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$.

2. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0 \times a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc en prenant } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ on a } U_{n+1} = MU_n.$$

Soit \mathcal{P}_n la propriété $U_n = M^n U_0$.

- Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = U_0$ car M^0 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que la propriété est vraie au rang p avec $p \geq 0$, c'est-à-dire $U_p = M^p U_0$.
On sait que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$ donc $U_{p+1} = MU_p$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_p = M^p U_0$, donc $U_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$.
Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire, donc elle est pour tout $n \geq 0$.

Donc, pour tout entier naturel n , $U_n = M^n U_0$.

3. Soit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

$$MU = U \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 2x & \text{(L1)} \\ x + y + z = 4y & \text{(L2)} \\ 3x + y + z = 4z & \text{(L3)} \\ x + y + z = 1 & \text{(L4)} \end{cases}$

De (L2) et (L4) on déduit $4y = 1$ d'où $y = \frac{1}{4}$.

(L1) $\iff x + y + z = 3x$ ce qui donne en utilisant (L4) : $1 = 3x \iff x = \frac{1}{3}$.

(L4) $\iff z = 1 - x - y \implies z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Comme on n'a pas procédé par équivalences, il faut vérifier que pour les trois valeurs de x, y et z trouvées, les quatre lignes du système sont vérifiées, ce qui se fait sans problème.

L'unique matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$, est $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

4. Pour n entier non nul, on a : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \end{pmatrix}$

$$U_n = M^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3}\right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3}\right) c_0 \end{cases}$$

On constate que $b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 = \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0)$; or $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ donc $b_n = \frac{1}{4}$.

On sait qu'une suite géométrique de raison q où $-1 < q < 1$ est convergente vers 0 donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0; \text{ on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \times 2}{3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-3} = 0.$$

D'après les théorèmes sur les limites, on peut dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}a_0 + \frac{5}{12}b_0 + \frac{5}{12}c_0 = \frac{5}{12}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{5}{12}.$$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{3} \approx 33,33\%$ du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{4}$ donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{4} = 25\%$ du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}$ donc à long terme, la page 3 du site sera consultée $100 \times \frac{5}{12} \approx 41,67\%$ du temps de visite.

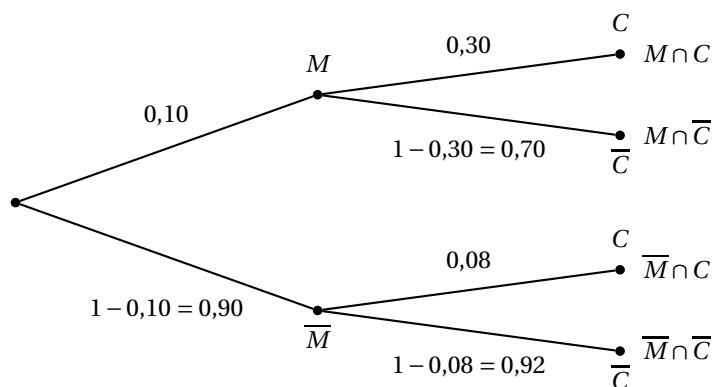
Exercice 4

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. a. $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(M \cap C) + P(\overline{M} \cap C) \\ = P(M) \times P_M(C) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.

Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400; 0,1)$, $P(X = 35) = \binom{400}{35} 0,1^{35} (1 - 0,1)^{400-35}$;

le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,0491.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geq 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leq 29)$.
D'après la calculatrice, $P(X \leq 29) \approx 0,0357$, donc $P(X \geq 30) \approx 0,9643$.

Partie C

1. On sait que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F = \frac{X}{400}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[0,1 - 1,96 \frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}} ; 0,1 + 1,96 \frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}} \right] = [0,0706 ; 0,1294]$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ; $\frac{60}{400} = 0,15 \notin I$.

Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.