Corrigé du baccalauréat S
Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_A a une affixe z' définie par : $z'-\text{i} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z-\text{i})$ ou encore : $z'-\text{i} = i(z-\text{i}) \iff z' = \text{i}+\text{i}z+1 \iff z' = \text{i}z+1+\text{i}$.

   D étant l'image de C r_A, on a donc :

   $d = \text{i}(3\text{i})+1+\text{i} = -3+1+\text{i} = -2+\text{i}$.

2. De même, pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_B a une affixe z' définie par : $z'-(1+\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z-1-\text{i}) \iff z' = 1+\text{i}+\text{i}(z-1-\text{i}) \iff z' = 1+\text{i}+\text{i}z-\text{i}+1 \iff z' = \text{i}z+2$.

   Donc $g = \text{i}(-2+\text{i})+2 = -2\text{i}-1+2 = 1-2\text{i}$.

   Enfin pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par r_O a une affixe z' définie par : $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}z = -\text{i}z$.

   Donc $h = -\text{i}(3\text{i}) = 3$.

3. On a $d-c = -2+\text{i}-3\text{i} = -2-2\text{i}$ et

   $g-h = 1-2\text{i}-3 = -2-2\text{i}$.

   Or $d-c = g-h \iff \overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{HG}} \iff$ CDGH est un parallélogramme.

   De plus $g-c = 1-2\text{i}-3\text{i} = 1-5\text{i}$, donc $\text{CG}^2 = 1+25 = 26$ et

   $h-d = 3-(-2+\text{i}) = 5+\text{i}$, donc $\text{DH}^2 = 25+1 = 26$.

   On a donc $\text{CG}^2 = \text{DH}^2 \iff \text{CG} = \text{DH}$.

   Conclusion : le parallélogramme CDGH a ses diagonales de même longueur : c'est un rectangle.

Partie B

1. En reprenant les définitions des rotations trouvées dans la partie A, on a :

   $n = \text{i}m+1+\text{i}$.

   De même : $p = \text{i}n+2 = \text{i}(\text{i}m+1+\text{i})+2 = -m+\text{i}-1+2 = -m+1+\text{i}$.

   Enfin $q = -\text{i}m$.

2. D'une part : $n-m = \text{i}m+1+\text{i}-m = m(\text{i}-1)+1+\text{i}$, d'autre part :

   $p-q = -m+1+\text{i}-(-\text{i}m) = m(\text{i}-1)+1+\text{i}$.

   Donc $n-m = p-q \iff MNPQ$ est un parrallélogramme

3. **a.** $\dfrac{m-n}{p-n} = \dfrac{m-(\text{i}m+1+\text{i})}{-m+1+\text{i}-(\text{i}m+1+\text{i})} = \dfrac{m(1-\text{i})-1-\text{i}}{m(-\text{i}-1)} = \dfrac{[m(1-\text{i})-1-\text{i}](-1+\text{i})}{m(-\text{i}-1)(\text{i}-1)} = \dfrac{2m\text{i}+2}{2m} = \dfrac{m\text{i}+1}{m} = \text{i}+\dfrac{1}{m}$ (car $M \neq$ O $\Rightarrow m \neq 0$).

   b. $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{mod } \pi) \iff \dfrac{m-n}{p-n}$ est un imaginaire pur.

Donc comme $\mathrm{i}+\dfrac{1}{m}$ ne peut être un imaginaire que si $\dfrac{1}{m}$ est un imaginaire, c'est-à-dire si m est un imaginaire, $MNPQ$ est un rectangle si et seulement si $m=\alpha\mathrm{i}$, avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, puisque M ne peut être ni O ni en A.

EXERCICE 2 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Puisque tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis la probabilité est égale à :
$\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}}=\dfrac{\dfrac{3!}{2!}}{\dfrac{25!}{2!\times 23!}}=\dfrac{3}{25\times 12}=\dfrac{1}{100}=0,01.$

Partie B

1. On a $p(X>5)=1-p(X\leqslant 5)$. Donc :
$p(X>5)=0,4 \iff 1-p(X\leqslant 5)=0,4 \iff 0,6=p(X\leqslant 5) \iff 0,6=\displaystyle\int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \iff 0,6=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^5 \iff 0,6=-\mathrm{e}^{-5\lambda}+1 \iff \mathrm{e}^{-5\lambda}=0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda=\ln 0,4 \iff \lambda=\dfrac{\ln 0,4}{-5}$.
Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5}\approx 0,183$ à10^{-3} près.
2. Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5)=\dfrac{p(X>5)}{p(X>3)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-5\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}}=\mathrm{e}^{-2\lambda}=\mathrm{e}^{-0,36}\approx 0,698.$
3. **a.** On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,4. La probabilité cherché est donc le complément à 1 de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :
$1-(0,6)^{10}\approx 0,994$ à10^{-3} près.
   b. Avec n ordinateurs on a à resoudre l'inéquation :
$1-0,6^n \geqslant 0,999 \iff 0,001 \geqslant 0,6^n \iff \ln 0,001 \geqslant n\ln 0,6 \iff$
$n \geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}\approx 13,5.$
Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Comme $a+b+c\neq 0$ le barycentre G de A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c et vérifie :
$a\overrightarrow{\mathrm{GA}}+b\overrightarrow{\mathrm{GB}}+c\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{0}$. On a donc grâce àla relation de Chasles :

$\|a\overrightarrow{M\text{A}}+b\overrightarrow{M\text{B}}+c\overrightarrow{MC}\|=k \iff \|a\overrightarrow{M\text{G}}+a\overrightarrow{\text{GA}}+b\overrightarrow{M\text{G}}+b\overrightarrow{\text{GB}}+c\overrightarrow{M\text{G}}+c\overrightarrow{\text{GC}}\|=$
$k \iff \left\|\underbrace{a\overrightarrow{\text{GA}}+b\overrightarrow{\text{GB}}+c\overrightarrow{\text{GC}}}_{=\overrightarrow{0}}+(a+b+c)\overrightarrow{M\text{G}}\right\|=k \iff |a+b+c|\left\|\overrightarrow{M\text{G}}\right\|=k \iff$
$\text{G}M=\dfrac{k}{|a+b+c|}$.

Cette dernière égalité montre que tous les points M sont àla distance $\dfrac{k}{|a+b+c|}$ du point G, donc appartiennent àla sphère de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.

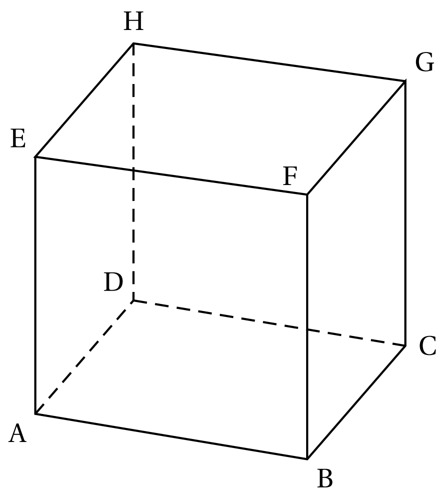
Partie B

1. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{\text{BE}}\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ d'où $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}=0+0+0=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{BE}}=0+0+0=0$.
   Comme $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{BE}}$ ne sont pas colinéaires, on déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BCE).
2. $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{BCE}) \iff \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{B}M}=0 \iff 1(x-1)+0(y-1)+1(z-0)=0 \iff x+z-1=0$.
3. La droite (Δ) étant perpendiculaire au plan (BCE) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et contient E.
   Une des équations paramétriques est donc :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\Delta) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 0+t\\ y &=& 0+0t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{lll} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$
4. Le plan (ABC) a pour équation $z=0$. Un point est commun à(Δ) et à(ABC) si ses coordonnées vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{lll} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\\ z &=& 0\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lll} x &=& t\\ y &=& 0\\ -1 &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x &=& -1\\ y &=& 0\\ -1 &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right.$
   Il y a donc un seul point commun le point R de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
   Or le milieu de [BR] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1-1}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\ ;\dfrac{0+0}{2}\right)=(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$: c'est le point A. Donc R est le symétrique de B par rapport à A.
5. **a.** Soit G le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2 : ce barycentre existe puisque $1-1+2\neq 0$ et vérifie donc par définition :
   $-\overrightarrow{G\text{R}}-1\overrightarrow{G\text{B}}+2\overrightarrow{G\text{C}}=\overrightarrow{0}$.
   Les coordonnées de G sont donc :
   $x_G=\dfrac{1x_\text{R}-x_\text{B}+2x_\text{C}}{2}=0$;
   $y_G=\dfrac{1y_\text{R}-y_\text{B}+2y_\text{C}}{2}=1$;
   $z_G=\dfrac{1z_\text{R}-z_\text{B}+2z_\text{C}}{2}=0$.
   Ces coordonnées sont en fait celles du point D.

b. Comme D est le barycentre de R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2, on a donc par définition :
$1\overrightarrow{\text{DR}} - 1\overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :
$\|\overrightarrow{M\text{R}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\| = 2\sqrt{2} \iff \|\overrightarrow{M\text{D}} + \overrightarrow{\text{DR}} - \overrightarrow{M\text{D}} - \overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{M\text{D}} + 2\overrightarrow{\text{DC}}\| = 2\sqrt{2} \iff \|\underbrace{\overrightarrow{\text{DR}} - \overrightarrow{\text{DB}} + 2\overrightarrow{\text{DC}}}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{M\text{D}} - \overrightarrow{M\text{D}} + 2\overrightarrow{M\text{D}}\| = 2\sqrt{2} \iff$
$\|2\overrightarrow{M\text{D}}\| = 2\sqrt{2} \iff \text{D}M = \sqrt{2}$: les points M appartiennent donc à, la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.
Rem. : on aurait utiliser directement le résultat de la R. O. C.

c. On a $\text{DB}^2 = 1+1 = 2$, $\text{DE}^2 = 1+1 = 2$ et $\text{DG}^2 = 1+1 = 2$, d'où $\text{DB} = \text{DE} = \text{DG} = \sqrt{2}$, ce qui démontre que B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Calculons la distance du centre de la sphère au plan (BCE) :
$d(\text{D}, (\text{BCE})) = \dfrac{|0+0-1}{1^2+1^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$. Cette distance étant inférieure au rayon de la sphère, ceci démontre que (S) et (BCE) sont sécants selon un cercle, dont le centre est le projeté orthogonal de D sur le plan (BCE) et son rayon r vérifie l'égalité de Pythagore
$r^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \iff r^2 + \dfrac{1}{2} = 2 \iff r^2 = \dfrac{3}{2} \iff r = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soient a, b et c trois entiers non nuls ; supposons que a divise le produit bc et que a et b soient premiers entre eux.

Il existe donc un entier k tel que $bc = ka$. D'autre part puisque a et b soient premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bezout deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ou en multipliant par c non nul :
$acu + bcv = c$ et en remplaçant bc par ka :
$acu + kav = c \iff a(cu + kv) = c$.
Cette égalité montre que a divise c.

Partie B

1. On calcule : $u_1 = 2 + 3 + 6 - 1 = 10$;
   $u_2 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$;
   $u_3 = 8 + 27 + 216 - 1 = 250$;
   $u_4 = 16 + 81 + 1\,296 - 1 = 1\,392$;
   $u_5 = 32 + 243 + 7\,776 - 1 = 8\,050$;
   $u_6 = 64 + 729 + 46\,656 - 1 = 47\,448$.
2. On a : $2 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow 2^n \equiv 0 \mod 2$;
   $3 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow 3^n \equiv 1 \mod 2$;
   $6 \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow 6^n \equiv 0 \mod 2$.
   Donc $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0 \mod 2$
   u_n est donc pair.
   Ou encore 2^n et 6^n sont pairs ; 3^n et 1 sont impairs, donc leur différence est paire et par somme u_n est pair.
3. n est pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.
   On peut donc écrire : $u_n = u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 2^{2k} \times 3^{2k} - 1 = 4^k + 4^k \times 9^k + 9^k - 1$.
   Comme $4 \equiv 0 \mod 4$, $4^k \equiv 0 \mod 4$;
   $4^k \times 9^k \equiv 0 \mod 4$;
   $9 \equiv 1 \mod 4$, donc $9^k \equiv 1 \mod 4$, d'où par somme :
   $u_{2k} \equiv 0 + 0 + 1 - 1 = 0 \mod 4$, c'est àdire que u_{2k} est un multiple de 4.
4. On a vu que 2 divise u_1, que 3 divise u_2, que 5 divise u_3 et 7 divise u_5.
   Donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E)
5. **a.** D'après le théorème de Fermat, 2 étant premier avec p, on a $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
   Donc $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \iff 3 \mod p$.
   D'autre part 3 étant premier avec p, $3^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
   Donc $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2 \mod p$.

   b. Par définition : $6u_{p-2} = 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.
   On a vu que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \mod p$, que $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \mod p$ et on a $6^{p-1} \equiv 1 \mod p$ car p premier avec 2 et 3 est premier avec 6.
   Donc $6 \times u_{p-2} \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \mod p$ soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$.

   c. On vient de démontrer que $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \mod p$: donc p divise $6 \times u_{p-2}$, mais p et 6 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss p divise u_{p-2}.
   Conclusion : tout entier p premier appartient à l'ensemble (E)

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
$g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0~;~+\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 > 1$).
Conclusion : $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
La fonction étant strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.
3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$g(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$.

Partie B

1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.
Comme la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$
$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
2. **a.** $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} =$
$\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} =$
$\dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
b. La position relative de la droite (D) et de la courbe ($\mathscr{C}$) sur $[0\,;\,1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0\,;\,1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe ($\mathscr{C}$) est au dessus de la droite (D).
3. **a.** En posant : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$, u est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln|u(x)|$, mais comme on a vu que $u(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0, |u(x)| = u(x)$.
Conclusion : une primitive sur $[0\,;\,1]$ de f est la fonction F définie par $F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$.
b. On a vu que sur $[0\,;\,1]$, la courbe ($\mathscr{C}$) est au dessus de la droite (D), donc l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x \left[F(x) - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = F(1) - \dfrac{1}{2} - F(0) =$
$\ln\left(\mathrm{e}^1 - 1\right) - \dfrac{1}{2} - \left[\ln\left(\mathrm{e}^0 - 0\right)\right] = \ln(\mathrm{e} - 1) - \dfrac{1}{2}$. (u. a.)

Partie C

1. Voir plus bas.
2. *Initialisation* : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on a vu (question 2. b.)que sur $[0\,;\,1]$ $f(x) - x \geqslant 0$, soit avec $x = u_0$, $f(u_0) - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 \geqslant u_0$.
   On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
   Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :
   $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$ par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:
   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_p\right) \leqslant f\left(u_{p+1}\right) \leqslant f(1) \iff u_1 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$
   et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$.
   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.
   Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.
   Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ le nombre 1.
   Conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

ANNEXE

EXERCICE 4