Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S
Amérique du Sud novembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. La droite $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (-1~;~3~;~-1)$ lequel n'est manifestement pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\imath}$, vecteur directeur de la droite des abscisses $\mathcal{D}$: donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.
   Prouvons à présent qu'elle ne sont pas sécantes.
   Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ étant : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & u\\ y & = & 0\\ z & = & 0\end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$,
   on a pour $M(x~;y~;~z)$:
   $$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff \text{il existe } (u~;~t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l c r} u & = & -t\\ 0 & = & 3+3t\\ 0 & = & 1-t\end{array}\right.$$
   $$\iff \text{il existe } (u~;~t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l c r} u+t & = & 0\\ t & = & -1\\ t & = & 1\end{array}\right..$$
   Les deux dernières équations étant incompatibles, le système n'a pas de solution et donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.
   Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont donc **non coplanaires**.

2. Le vecteur $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$ sera un vecteur directeur de Δ si $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$, i.e. si $a = 0$ et $-a+3b-c =$, i.e. encore si $a = 0$ et $c = 3b$.
   Prenons $b = 1$. Alors le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$ est un vecteur directeur de Δ.

3. **a.** Soit $M(u~;~0~;~0)$ un point de $\mathcal{D}$. On a alors : $-3y+z = -3\times 0+0 = 0$. Donc $M \in \mathcal{P}$ et ceci quel que soit le point M de $\mathcal{D}$.
   Donc le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $-3y+z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathcal{D}$.

   b. En tant que point de $\mathcal{D}'$ le point J a pour coordonnées $(-t~;~3+3t~;~1-t)$.
   Pour obtenir t exprimons que J appartient au plan $\mathcal{P}$:
   $$-3y+z = 0 \iff -3(3+3t)+(1-t) = 0 \iff -10t = 8 \iff t = -\frac{4}{5}.$$
   On en déduit que les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$ sont $\left(\frac{4}{5}~;~\frac{3}{5}~;~\frac{9}{5}\right)$.

   c. Désignons par Δ_1 la droite passant par J et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. Elle a pour représentation paramétrique :
   $$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{4}{5}\\ y & = & \frac{3}{5}+v\\ z & = & \frac{9}{5}+3v\end{array}\right., \quad v \in \mathbb{R}.$$

Étudions l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ_1. On a pour $M(x\,;\,y\,;\,z)$:

$$M \in \mathcal{D} \cap \Delta_1 \iff \text{il existe } (u;v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{4}{5} \\ 0 & = & \frac{3}{5} + v \\ 0 & = & \frac{9}{5} + 3v \end{array}\right.$$

$$\iff \text{il existe } (u\,;\,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{4}{5} \\ v & = & -\frac{3}{5} \\ v & = & -\frac{3}{5} \end{array}\right. .$$

Donc la droite Δ_1 est sécante à $\mathcal{D}$ en un point I de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;\,0\,;\,0\right)$.

Montrons que Δ_1 c'est Δ.
La droite Δ_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, donc elle est parallèle à Δ, donc elle est orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.
D'autre part elle rencontre $\mathcal{D}$ en I et $\mathcal{D}'$ en J.
Donc Δ_1 est une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Enfin, d'après **1.** $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites non coplanaires, et on a admis qu'il existe dans ce cas une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Donc Δ_1 est bien la **perpendiculaire commune** Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

d. Le vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ ayant pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{3}{5}\,;\,\frac{9}{5}\right)$, on en déduit que la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ est : $d(\mathcal{D}\,;\,\mathcal{D}') = \text{IJ} = \frac{3}{5} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que la rotation R_{A} a pour écriture complexe : $z' - a = \text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{2}}(z - a)$, i.e. $z' - a = -\text{i}(z - a)$.
Donc $u = -\text{i}(z - a) + a = -\text{i}z + a(1 + \text{i}) = -\text{i}z + 5\underbrace{(1 + \text{i})^2}_{=2\text{i}} = -\text{i}z + 10\text{i} = \text{i}(10 - z)$.
L'affixe du point U est donc $u = \text{i}(10 - z)$.

   De même la rotation R_{B} a pour écriture complexe : $z' - b = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}}(z - b)$, i.e. $z' - b = \text{i}(z - b)$.
Donc $t = \text{i}(z - b) + b = \text{i}z + b(1 - \text{i}) = \text{i}z + 5\underbrace{(1 - \text{i})^2}_{=-2\text{i}} = \text{i}z - 10\text{i} = \text{i}(z - 10)$.
L'affixe du point T est donc $t = \text{i}(z - 10)$.

   Montrons que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
On sait déjà que O est le milieu de $[MD]$.
D'autre part, on a $u + t = 0$. Donc O est le milieu de $[UT]$.
Les diagonales du quadrilatère $MUDT$ se coupent en leur milieu O : donc c'est un parallélogramme de centre O.

2. On remarque que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = (z - 5)(\overline{z} - 5) - 25$.
Donc :

$M_z \in \Gamma \iff (z-5)(\overline{z}-5) = 25 \iff (z-5)(\overline{z-5}) = 25 \iff |z-5|^2 = 5^2 \iff |z-5| = 5$.

L'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z}-5z-5\overline{z} = 0$ est donc le **cercle** de centre Ω d'affixe 5 et de rayon $r = 5$.

Comme on a $\Omega A = \Omega P = \Omega O = \Omega B = 5 = r$, le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.

3. **a.** Les points O, M et U sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires, i.e. puisque $\overrightarrow{OM}$ n'est pas nul, si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OU} = k\overrightarrow{OM}$, i.e. encore s'il existe un réel k tel que $u = kz$.

Or : $u = kz$ avec k réel $\iff \dfrac{u}{z} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{u}{z} = \overline{\left(\dfrac{u}{z}\right)} \iff \dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.

Donc les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.

b. Il résulte du **a.** que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $u\overline{z} - \overline{u}z = 0$.

Or :

$u\overline{z} - \overline{u}z = 0 \iff \mathrm{i}(10-z)\overline{z} + \mathrm{i}(10-\overline{z})z = 0 \iff 10\overline{z} + 10z - 2z\overline{z} = 0 \iff z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0 \iff M \in \Gamma$.

Donc les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient au cercle Γ.

4. OMU est isocèle en O $\iff$ OM = OU $\iff |z| = |u| \iff |z| = |10-z| \iff$ OM = MP $\iff$ M appartient à la médiatrice du segment [OP].

Donc l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O est la droite (AB).

On a dans ce cas OM = OU, donc $DM = TU$.

Le parallélogramme $MUDT$ a donc ses diagonales de même longueur : c'est un **rectangle**.

5. $\dfrac{u}{z}$ est un imaginaire pur $\iff \dfrac{u}{z} = -\overline{\left(\dfrac{u}{z}\right)} \iff \dfrac{u}{z} = -\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}} \iff u\overline{z} + \overline{u}z = 0 \iff \mathrm{i}(10-z)\overline{z} - \mathrm{i}(10-\overline{z})z = 0 \iff 10\overline{z} - 10z = 0 \iff \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur est l'axe réel privé de O.

Si M est un point de la droite (OP) privée de O et P, alors $z \neq 0$ et $u \neq 0$ et on a : $\arg\left(\dfrac{u}{z}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Et comme $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU}\right) = \arg\left(\dfrac{u}{z}\right) \quad (2\pi)$, on en déduit : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Le parallélogramme $MUDT$ a donc ses diagonales perpendiculaires : c'est un **losange**.

Le quadrilatère $MUDT$ est un carré si c'est un rectangle et un losange, donc si M est sur la droite (AB) et sur la droite (OP) privée de O et P, i.e. si M est en Ω.

Donc il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré : c'est Ω.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Si n est impair, n^4 l'est aussi, donc n^4+1 est pair.
Si n est pair, n^4 l'est aussi, donc n^4+1 est impair.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
– Si $n \equiv 0 \mod 3$, $n^4 \equiv 0 \mod 3$, $A(n) \equiv 1 \mod 3$.
– Si $n \equiv 1 \mod 3$, $n^4 \equiv 1 \mod 3$, $A(n) \equiv 2 \mod 3$.
– Si $n \equiv 2 \mod 3$, $n^4 \equiv 1 \mod 3$, $A(n) \equiv 2 \mod 3$.
Donc, quel que soit l'entier $n \geqslant 2$, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

c. Soit d un diviseur de $A(n)$: il existe un entier k tel que $n^4+1 = kd$, i.e. tel que :

$$kd - n^3 \times n = 1.$$

On en déduit, d'après le théorème de Bezout, que d et n sont premiers entre eux.
Donc, tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

d. Soit d un diviseur de $A(n)$. On a alors : $n^4+1 \equiv 0 \mod d$.
D'où : $n^4 \equiv -1 \mod d$, et donc : $n^8 \equiv 1 \mod d$.
Donc, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \mod d.$$

2. **a.** Soit k un entier tel que $n^k \equiv 1 \mod d$.
Effectuons la division euclidienne de k par s (l'existence de s est assurée d'après **1.d**) :
Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = sq + r$ avec $0 \leqslant r < s$.
D'où : $n^k = (n^s)^q \times n^r$. Or : $n^s \equiv 1 \mod d$. Donc : $(n^s)^q \equiv 1 \mod d$.
Et comme $n^k \equiv 1 \mod d$, il en résulte : $n^r \equiv 1 \mod d$.
Or $r < s$ et s est le plus petit entier naturel non nul ayant cette propriété.
Donc $r = 0$ et donc s divise k.

b. On a vu au **1.d** que : $n^8 \equiv 1 \mod d$. Donc d'après **a**, s est un diviseur de $k = 8$.

c. D'après **1.c**, l'entier d est premier avec n. Si, de plus, d est premier, alors il découle du petit théorème de Fermat que :

$$n^{d-1} \equiv 1 \mod d.$$

Comme $d \geqslant 2$ (car premier) alors $k = d-1$ est un entier naturel non nul.
D'où, d'après **a**, s divise k, i.e. s divise $d-1$.

On a donc montré que :
$\boxed{\text{Si } d \text{ est un diviseur premier de } A(n), \text{ alors } s \text{ est un diviseur de } d-1.}$

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$ et soit s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \mod d$.
D'après **2.b** s est un diviseur de 8, donc $s \in \{1, 2, 4, 8\}$.
Si $s \in \{1, 2, 4\}$, i.e. si s est un diviseur de 4, alors de : $n^s \equiv 1 \mod p$ on déduit :

$$n^4 \equiv 1 \mod p.$$

D'où :

$$A(n) \equiv 2 \mod p.$$

Or on a $\boxed{p > 2}$, puisque n étant un entier pair alors $A(n)$ est un entier impair.
Donc $A(n)$ n'est pas un multiple de p, contrairement à l'hypothèse.
Donc s ne divise pas 4 : donc $s = 8$, et, d'après **2.c**, 8 est un diviseur de $p-1$, i.e. $p-1 \equiv 0 \mod 8$, et donc $p \equiv 1 \mod 8$.

On a donc montré que, dans le cas où n est un entier pair :
$\boxed{\text{Si } p \text{ est un diviseur premier de } A(n), \text{ alors } p \text{ est congru à 1 modulo 8.}}$

4. Recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.
$A(12) = 20\,737$. En effectuant les divisions successives de 20 737 par les nombres de la liste donnée, on constate que $20\,737 = 89 \times 233$.
Or $\sqrt{233} \approx 15,3$ donc $\sqrt{233} < 17$. Et comme, dans la liste, il n'y a pas d'autres nombres avant 17, cela signifie que 233 fait partie de la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8.
Donc les diviseurs premiers de $A(12)$ sont 89 et 233.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Les évènements F, A, C et I constituent une partition de l'univers. Donc :
$$P(F) + P(A) + P(C) + P(I) = 1.$$
D'où, puisque $P(A) = P(F)$ et $P(C) = P(I) = 2P(F)$ on a : $P(F) + P(F) + 2P(F) + 2P(F) = 1$, i.e. $6P(F) = 1$.
On obtient donc : $p(F) = p(A) = \dfrac{1}{6}$ et $P(C) = P(I) = \dfrac{1}{3}$.

2. **a.** $P(S \cap A) = P(A) \times P_A(S) = \dfrac{1}{6} \times 0,5 = \dfrac{1}{12}$.

b. D'après la formule des probabilités totales :
$$p(S) = P(S \cap F) + P(S \cap A) + P(S \cap AC) + P(S \cap I).$$
Donc :
$$P(S) = \frac{1}{6} \times 0,2 + \frac{1}{6} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,1 + \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{1}{6}\underbrace{(0,7 + 2 \times 0,5)}_{=1,7} = \frac{17}{60}.$$

c. On demande la valeur de $P_S(C)$:
$$P_S(C) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,1}{\frac{1}{6} \times 1,7} = \frac{2}{17}.$$
La probabilité qu'il ait acheté le supplément sur le site canadien est $\dfrac{2}{17}$.

3. **a.** $d^2 = \left(0,335 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0,310 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0,355 - \dfrac{1}{3}\right)^2 \approx 0,001\,0167$.
D'où : $1\,000d^2 \approx 1,0167$.

b. Le neuvième décile est : $D_9 = 1,5104$. Donc $1\,000d^2 < D_9$.
On peut donc considérer, au risque de 10 %, que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x[(\cancel{1}+x)-\cancel{1}]}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geqslant 0$ et que pour tout réel x, e^x est > 0, on a $f'(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

2. **a.** On partage l'intervalle $[0\,;\,1]$ en cinq intervalles de même longueur $\dfrac{1}{5}$.
Si bien que :

$$[0\,;\,1] = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant 4}\left[\frac{k}{5}\,;\frac{k+1}{5}\right].$$

Soit k un entier compris entre 0 et 4. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, elle l'est en particulier sur l'intervalle $I_k = \left[\dfrac{k}{5}\,;\dfrac{k+1}{5}\right]$.
Donc pour tout x de I_k :

$$f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Il découle alors de l'inégalité de la moyenne que :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

i.e. :

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

et ceci, quel que soit l'entier k compris entre 0 et 4.

Interprétation graphique : la fonction f étant continue et positive sur l'intervalle I_k, l'intégrale ci-dessus représente l'aire sous la courbe de la fonction f, exprimée en unité d'aire.
On en déduit que cette aire est comprise entre l'aire du rectangle r_K, situé au-dessous de la courbe, et celle du rectangle R_K, situé au-dessus de la courbe, ces rectangles ayant pour base $\dfrac{1}{5}$ et pour hauteurs respectives $f\left(\dfrac{k}{5}\right)$ et $f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$.

b. En sommant les inégalités précédentes pour k compris entre 0 et 4, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}S_4.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (Relation de Chasles).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f\left(\frac{k+1}{5}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}f\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{1}{5}(S_5-1).$

Il en résulte :
$$\frac{1}{5}S_4 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\left(S_5 - 1\right).$$

c. On trouve, à 10^{-4} près : $S_4 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}8178$.
D'où : $\dfrac{1}{5}\left(S_4\right) \approx 1{,}0917$ qu'on **minore** par 1,091
et $\dfrac{1}{5}\left(S_5 - 1\right) \approx 1{,}1636$ qu'on **majore** par 1,164.

Ce qui nous donne l'encadrement : $1{,}091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1{,}164$.

3. a. Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a :
$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{(1-\cancel{x^2})+\cancel{x^2}}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.

b. En multipliant par e^x dans l'égalité précédente, on obtient, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$:
$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} = (1-x)\mathrm{e}^x + \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}.$$
D'où, en intégrant de 0 à 1 :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I.$$

c. Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, les fonctions sous le signe somme étant continues, ainsi que leurs dérivées, on peut effectuer une intégration par parties. Posons :

$$\left|\begin{array}{l} u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = 1-x \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} u(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = -1 \end{array}\right. \qquad u(x)\,v'(x) = -\mathrm{e}^x$$

D'où :
$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 =$$
$$\left[(1-x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \left[(2-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - 2.$$

Ainsi :
$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2.$$

d. Puisque $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x - (\mathrm{e}-2)$,

On déduit de l'encadrement obtenu au **2.c** que :
$$1{,}091 - (\mathrm{e}-2) \leqslant I \leqslant 1{,}164 - (\mathrm{e}-2).$$

D'où l'encadrement d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} suivant :
$$0{,}37 \leqslant I \leqslant 0{,}45.$$