Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - \mathrm{i}$, $b = -2 + 4\mathrm{i}$, $c = 3 - \mathrm{i}$ et $h = -2$.

   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. En déduire ques les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.
5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle cironcscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.
6. On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
   - **a.** Déterminer l'affixe du point K.
   - **b.** Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

   - **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.
   - **b.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   - **c.** Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont donnée en **annexe 1**.

   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

   On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{x} > \ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a) 0,271 **b)** 0,135 **c)** 0,865 **d)** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a) $\dfrac{125}{3888}$ **b)** $\dfrac{625}{648}$ **c)** $\dfrac{25}{7776}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

a) 0,5 **b)** 0,35 **c)** 0,46 **d)** 0,7

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x-7y-5=0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2-7y^2=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\,;\,-4\,;\,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\,;\,-3\,;\,1)$.

On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**

On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. a. Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. a. Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

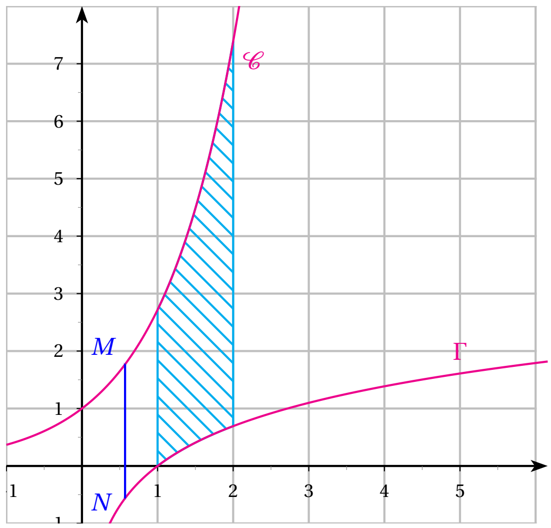
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.

a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

b. En déduire que $\left|\left|\overrightarrow{MM'}\right|\right|^2 \geqslant \left|\left|\overrightarrow{HH'}\right|\right|^2$ et conclure.

La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4 (non spé)