

∞ Baccalauréat S (obligatoire) Antilles-Guyane ∞
septembre 2010

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction \ln est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à x associe $\frac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative \mathcal{C}

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. Déterminer le point A de la courbe \mathcal{C} en lequel la tangente \mathcal{T} est parallèle à la droite \mathcal{D} .
6. Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) tracer les droites \mathcal{D} et \mathcal{T} et la courbe \mathcal{C} .

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} . On exprimera cette aire en cm^2 . Hachurer cette région sur le graphique.

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.

Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , vérifiant $|z-2| = |z-2i|$ est la droite d'équation $y = x$.
2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a , b et c vérifiant $\frac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.
3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La sphère de centre A(1 ; 1 ; 1) et de rayon 10 est tangente au plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

EXERCICE 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- a. Calculer v_0 .
 - b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - d. Exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- a. Calculer w_0 .
- b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
- c. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $w_{n+1} = w_n + 2$.
- d. Exprimer w_n en fonction de n .

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 - b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
- b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?