

∞ Baccalauréat S (obligatoire) Antilles-Guyane ∞
septembre 2010

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

Soit $x > 0$.

Considérons la fonction $x \mapsto [\exp(\ln x)] = x$.

En dérivant ces deux fonctions, en utilisant en premier la formule de dérivation d'une fonction composée : $\ln'(x) \times \exp'(\ln x) = 1$, soit puisque $\exp' = \exp$

$\ln'(x) \times \exp(\ln x) = 1$, ou encore $\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$, car $x \neq 0$.

PARTIE B - Étude de fonction

I - Étude d'une fonction auxiliaire

1. g somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle

$$g'(x) = 2x + 0 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Comme $x > 0$ le signe de la dérivée est donc celui du trinôme $2x^2 - 1 = (x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{2} - 1)$ ou encore de celui de $x\sqrt{2} - 1$ puisque $x\sqrt{2} + 1 > 1 > 0$.

Ce trinôme s'annule donc en $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur $\left] 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$, $g'(x) < 0$: la fonction est décroissante ;

Sur $\left] \frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty \right[$, $g'(x) > 0$: la fonction est croissante.

2. On a $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 > 0$, car somme de deux termes positifs.

Le minimum de g étant supérieur à zéro, on a donc $g(x) > 0$, sur $]0 ; +\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative \mathcal{C}

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -\infty$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit la fonction d définie sur $]0 ; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \frac{\ln x}{x}$.

On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0$, c'est-à-dire que la droite \mathcal{D} est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de plus l'infini.

3. On a $\left[\frac{\ln x}{x}\right]' = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$.

4. On a donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$: d'après la question précédente les deux termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, donc le quotient l'est aussi : la fonction f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

5. La droite \mathcal{D} a pour coefficient directeur 1. Il faut donc chercher l'abscisse x_A telle que $f'(x_A) = 1$.

Donc on cherche $f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = 1 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$. Or

$$f(e) = e + \frac{\ln e}{e} = e + \frac{1}{e}.$$

Finalement : $A\left(e; e + \frac{1}{e}\right)$

6. Voir plus bas.

III - Calcul d'une aire

1. Intégration par parties :

$$\text{On pose : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = \ln x \\ u(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions sont dérivables donc continues sur $[1; e]$, donc

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = [(\ln x)(\ln x)]_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \iff I \iff 2I = (\ln(e))^2 - (\ln(1))^2 = 1 \iff$$

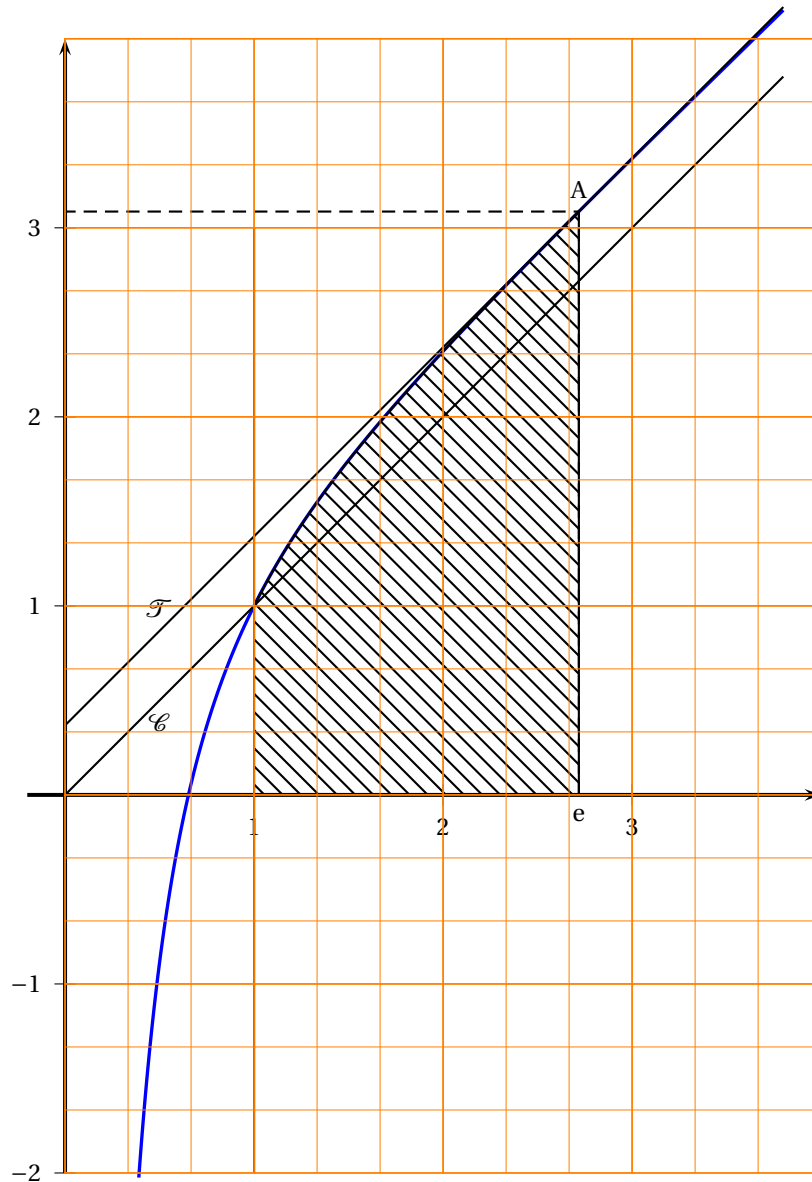
$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}.$$

2. La fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(1) = 1$, donc sur l'intervalle $[1; e]$, $f(x) \geq 1 > 0$.

L'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} est donc égale en unités d'aire à l'intégrale $\int_1^e f(x) dx$.

$$\text{Or } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + I = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} \text{ (u.a.)}.$$

L'unité d'aire étant égale à $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, l'aire de la surface est donc égale à $\frac{9e^2}{2} \approx 33,25 \text{ cm}^2$, ce que l'on vérifie approximativement sur la figure.



EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. VRAIE. Si A est le point d'affixe 2 et B celui d'affixe $2i$, $|z - 2| = |z - 2i| \iff AM = BM \iff M$ est équidistant de A et de B, donc M appartient à la médiatrice de [AB] : cette médiatrice a bien pour équation $y = x$.
2. VRAIE. $\frac{b-a}{c-a} = -3 \Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-3)$ soit $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \pi$. Cette dernière égalité montre que les points A, B et C sont alignés.
3. VRAIE. $M(x; y; z) \in (B, \vec{u}) \iff \vec{BM} = \alpha \vec{u} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} x-2 = 1\alpha \\ y-3 = 2\alpha \\ z-4 = 3\alpha \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = 2\alpha + 3 \\ z = 3\alpha + 4 \end{cases}$$

Or en posant $\alpha = t - 1$, on a donc :

$$M(x; y; z) \in (\mathbb{B}, \vec{u}) \iff \begin{cases} x = t-1+2 \\ y = 2(t-1)+3 \\ z = 3(t-1)+4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases}$$

4. FAUSSE. L'affirmation signifie que la distance du centre A de la sphère au plan \mathcal{P} est égale à 10. Or :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 10.$$

EXERCICE 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la définition $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $-\frac{1}{2}$; or $u_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq u_2$.
 - Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$; or $u_1 + \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2 \neq u_2$.

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. a. $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$.
- b. On a pour tout naturel n , $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.
- c. $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.
- d. On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3. a. $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.
- b. On a $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$.
- c. On a par définition $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :
 $w_{n+1} = 2 + w_n$.
- d. L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2.
On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$.

4. On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

Donc $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. Démonstration par récurrence :
- Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.
 - Hérédité : supposons qu'il existe un naturel k tel que :

$$S_k = \sum_{i=0}^k u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}.$$

$$\text{Donc } S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}.$$

La formule est vraie au rang $k+1$.

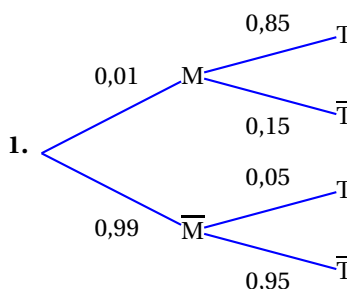
On a donc démontré par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats



2. a. On suit la première branche : la probabilité est égale à $p(M) \times p_M(T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.
 b. La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à $0,99 \times 0,05 = 0,0495$.

On a donc $p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.

3. Il faut calculer $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$.

4. a. On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,058$.
 X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0,058)$.

La probabilité que k animaux aient un test positif est égale à :

$$\binom{5}{k} \times 0,058^k \times (1 - 0,058)^{5-k}.$$

On obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,7417	0,2284	0,0281	0,0017	0,0001	0

- b. L'évènement contraire est : tous les animaux ont un test négatif qui d'après le tableau précédent a une probabilité d'environ 0,7417.

La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc : $1 - 0,7417 = 0,2583$.

5.

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

- a. On a d'après les données du tableau :

$$E = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 = 5,80 + 1,50 = 7,30 \text{ €}.$$

Ceci représente le coût moyen par animal

b. Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de :

$$200 \times 7,30 = 1460 \text{ €}.$$