Baccalauréat S Asie 20 juin 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 *point.*

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $\mathscr{P}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-2t\\ y &=& t\\ z &=& -5-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathscr{P} : \quad 3x+2y-z-5=0.$$

Affirmation 1 : la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $4x-y-z+3=0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1+\text{e}^{-2x}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2-t)\text{e}^{-t}\,\text{d}t$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} t^2 \ln t\,\text{d}t$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\dfrac{2\text{e}^3+1}{9}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

On considère le point A, d'affixe $z_{\text{A}} = -\sqrt{3}+\text{i}$, le point A_1 d'affixe $z_{\text{A}_1} = \overline{z_{\text{A}}}$ où $\overline{z_{\text{A}}}$ désigne le conjugué de z_{A}.

On note enfin B image du point A_1 par la rotation r et z_{B} l'affixe du point 8.

1. a. Écrire le nombre complexe z_{A} sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

   b. Vérifier que $z_{\text{B}} = 2\text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_{B} sous forme algébrique.

   Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = \dfrac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.
En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $\text{B}' = \text{A}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + \text{i}.$$

1. **a.** Ecrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.

2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre 0 qui transforme le point A en B.

b. Préciser les éléments caractéristiques dc la similitude f.

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g.
On note z et z' les affixes respectives des points M et M', et $\overline{z}$ celle du conjugué de z.

a. Démontrer l'égalité : $z' = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z}$.

b. On pose $\text{C} = g(\text{A})$ et $\text{D} = g(\text{C})$. Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.

c. Quelle est la nature du triangle OAC ?

d. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OD}}$ sont colinéaires.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

– un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
– un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
– un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. **a.** Justifier l'égalité : $p\,(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $\mathrm{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b $(b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4, b = 9 et N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.