B10R19A19BAC2014

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2014

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$

ب) حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين: $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$

$$6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$$

جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6\leq 0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log(x^2+100)=1+\log 2+\log x$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ، مع التبرير، في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln u_n$

أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فإنّ (v_n) متقاربة.

ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فإنّ (v_n) متناقصة.

جـ) إذا كانت (u_n) هندسية فإنّ (v_n) حسابية.

2/ الجدول الآتي يمثل سلسلة إحصائية:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	9	12	12	13

أ) إحداثيات النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i\,;y_i)$ هي $(3\,;10{,}8)$

ب) معامل توجيه مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لسحابة النقط هو 3,1

التمرين الثالث: (04 نقاط)

ثلاثة أكياس متماثلة U_1 ، U_2 و U_3 كل منها يحوي 6 كريات متماثلة، الكيس U_1 يحوي كريتين بيضاوين وأربع كريات حمراء، الكيس U_2 يحوي ثلاث كريات بيضاء وثلاث كريات حمراء والكيس U_3 يحوي خمس كريات بيضاء وكرية حمراء. نختار عشوائيا كيسا ثم نسحب منه دون اختيار كرية واحدة.

1) شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة التي تنمذج هذه الوضعية.

2) ما احتمال سحب كرية بيضاء من الكيس U_3 ؟

3) ما احتمال سحب كرية بيضاء؟

4) علما أنّ الكرية المسحوبة بيضاء، ما احتمال أن تكون من الكيس U_3 ؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1-x^2-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يعطى $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

4) عيّن فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ثمّ اكتب معادلة للمماس (T)

5) ارسم (D)، (T) و (C_f)

6) احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن مع التبرير الجواب الصحيح الوحيد من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة في كل حالة من الحالات الآتية:

I) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل

	أطباء	ممرضون
ذكور	12	25
إناث	8	15

اختير عشوائيا عضو من هذا الطاقم.

1) احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو:

أ) $\frac{1}{23}$ ب) $\frac{23}{60}$ جـ) $\frac{8}{23}$

2) احتمال أن يكون العضو المختار أنثى علما أنّها طبيبة هو:

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{2}{15}$ جـ) $\frac{8}{23}$

II) الجدول المقابل يعرف قانون احتمال لتجربة عشوائية:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

1) تباين قانون الاحتمال هو:

أ) $1,12$ ب) $2,5$ جـ) $1,25$

2) إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين حيث: $p(A)=0,4$ ، $p(B)=0,3$ فإنّ $p(A\cap B)$ هو:

أ) $0,12$ ب) $0,7$ جـ) $0,75$

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الجدول الآتي يمثّل تغير سعر الكيلوغرام الواحد من مادة استهلاكية بين السنوات 2008 و 2012

السنة	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
سعر $1kg$ بالدولار y_i	3,64	3,76	3,81	3,95	4,39

1) احسب النسبة المئوية لتغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة بين سنتي 2008 و 2012 .

2) مثّل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد.

3) جد إحداثيي G النقطة المتوسطة لسحابة النقط السابقة.

4) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=0,17x+3,40$ (النتائج مدورة إلى 10^{-2})

5) بفرض أنّ تغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة يبقى على نفس الوتيرة في السنوات القادمة.

أ) قدّر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة في سنة 2016.

ب) في أيّة سنة سيصبح سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة الاستهلاكية 5,61 دولارا؟

التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > -3$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2- لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث: $v_0 = 6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = 18$

أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$

ب) احسب الأساس q ثمّ عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

جـ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 6(1-2x)e^{-x} + 5$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I) 1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا. (يعطى $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$)

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) أنشئ (C_f)

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 3{,}5$ تقبل في $[0;7]$ حلين مختلفين α ، β حيث: $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$ و $2{,}9 < \beta < 3$

ب) حل بيانيا في المجال $[0;7]$ المتراجحة: $f(x) \le 3{,}5$

5) أ) عيّن العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدالة g المعرفة على $[0;7]$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة h المعرفة على $[0;7]$ بـ: $h(x) = 6(1-2x)e^{-x}$

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $[0;7]$

II) الكلفة الهامشية C_M لصناعة كمية x (مقدرة بالطن) من منتوج، حيث x ينتمي إلى المجال $[0;7]$ تنمذج بالدالة f أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

1) حدّد كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وما هي قيمة هذه الكلفة؟ (تدور النتيجة إلى 10^{-2})

2) ما هي كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5مليون دينار؟

3) نُذكّر أنّ دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

أ) بيّن أنّ الكلفة الإجمالية C_T معرفة بـ: $C_T(x) = (12x+6)e^{-x} + 5x + k$ حيث k عدد حقيقي.

ب) حدّد قيمة k إذا علمت أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$).

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2014

الشعبة: تسيير و اقتصاد — المادة : رياضيات

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) أ) التحقق من أن : $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$.	0.5	04
ب) حلول المعادلة : $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$		
أي أن : $(2\ln x+1)((\ln x)^2-5\ln x+6)=0$	0.25	
ومنه : $(2\ln x+1)(\ln x-2)(\ln x-3)=0$		
ومنه : $(x=\frac{1}{\sqrt{e}})$ أو $(x=e^2)$ أو $(x=e^3)$	0.75	
حلول المعادلة : $6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$		
أي أن : $(2e^x+1)(e^x-2)(e^x-3)=0$	0.5	
ومنه : $(x=\ln 2)$ أو $(x=\ln 3)$	0.5	
جـ) حل المتراجحة: $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^x+6\le 0$		
أي أن: $(2e^x+1)(e^x-2)(e^x-3)\le 0$	0.5	
و منه: $x\in[\ln 2;\ln 3]$		
2) حل المعادلة: $\log(x^2+100)=1+\log 2+\log x$	0.25	
المعادلة معرفة في المجال $]0;+\infty[$	0.5	
المعادلة تكافئ: $\log(x^2+100)=\log(10\times 2\times x)$	0.25	
و منه: $x^2-20x+100=0$ و منه: $x=10$		
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1) أ) خطأ مثلا: $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $v_n=-n\ln 2$ $(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty)$	0.75+0.25	05
ب) صحيح لأن: $u_{n+1}<u_n$ تكافئ $\ln u_{n+1}<\ln u_n$ أي $v_{n+1}<v_n$	0.75+0.25	
جـ) صحيح لأن: من $u_{n+1}=qu_n$ نجد $\ln u_{n+1}=\ln q+\ln u_n$ أي $v_{n+1}=v_n+\ln q$	0.75+0.25	
2) أ / صحيح لأن: $\bar{x}=3$ ، $\bar{y}=10{,}8$	0.75+0.25	
ب/ خطأ لأن: $a=1{,}3$	0.75+0.25	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) تشكيل الشجرة .	1	04
2) احتمال سحب كرية بيضاء من U_3 هو $\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$	1	
3) احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$	1	
4) احتمال اختيار U_3 علما أن الكرية بيضاء هو $P_B(U_3)=\frac{P(U_3\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$	1	

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع

التمرين الربع:(07نقاط) — المجموع: 07

I) 1) $g'(x)=-2x-\frac{1}{x}$ ، $g'(x)<0$ و منه g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$. — 0.75

2) أ) $g(1)=0$ — 0.25

إشارة $g(x)$ — 0.25

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0.25

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $x=0$ معادلة مستقيم مقارب — 0.25×2

2) أ) إثبات $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ — 0.5

f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ — 0.5

ب) جدول التغيرات — 0.25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) (D) مقارب مائل لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$ — 0.25

ب) $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$ — 0.25

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

في $]0;1]$ (C_f) أعلى (D) و في $[1;+\infty[$ (C_f) أسفل (D) — 2×0.25

4) $(T)//(D)$ معناه $f'(x)=1$ ومنه $x=e$ ؛ $y=x-1-\frac{1}{e}$ — 0.5×2

5) الرسم — 1

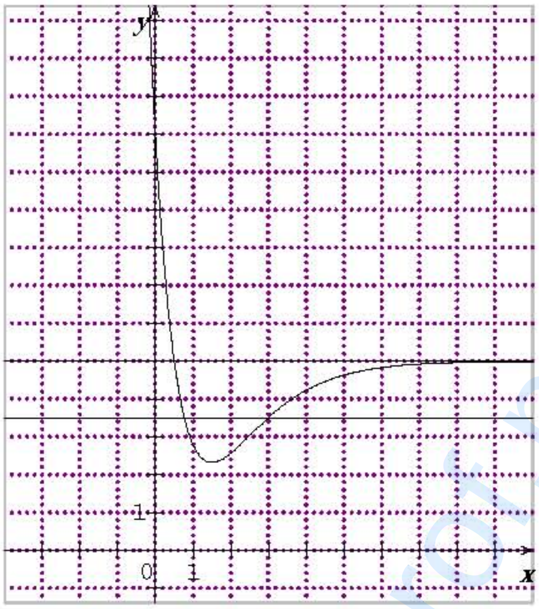
6) القيمة المتوسطة: $\mu=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx=1-\frac{1}{4}(\ln 3)^2$ — 0.75

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
الموضوع الثاني		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
I) 1) ب) $\frac{23}{60}$ لأن: $p(F)=\frac{23}{60}$	0.75+0.25	
2) أ) $\frac{2}{5}$ لأن: $p_M(F)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$	0.75+0.25	04
II) 1) جـ) 1,25 لأن: $E=2,5$	0.75+0.25	
و $V=0,2^2+2\times0,4^2+3\times0,1^2+4\times0,3^2-2,5^2=1,25$		
2) أ) 1,12 لأن $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=0,12$	0.75+0.25	
التمرين الثاني (04.5 نقطة)		
1) النسبة المئوية هي: $\frac{4,39-3,64}{3,64}\times100=20,6\%$	0.5	
2) تمثيل سحابة النقط	1.25	
3) $G(3\ ;\ 3,91)$	0.5	04.5
4) لدينا: $a=0,17$ ، $b=\overline{y}-a\overline{x}$ ومنه $y=0,17x+3,4$	1.25	
5) أ) $y=0,17\times9+3,4=4,93$	0.5	
ب) من أجل $y=5,61$ نجد $x=13$ وهي رتبة سنة 2020	0.5	
التمرين الثالث: (04.5 نقطة)		
1) أ) لدينا $u_0=3$ ومنه $u_0>-3$	0.25	
نفرض $u_n>-3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n-1>\frac{2}{3}(-3)-1$ أي $u_{n+1}>-3$	0.5	
إذن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n>-3$	0.25	04.5
ب) (u_n) متناقصة تماما لأن: $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}(u_n+3)<0$	0.5	
جـ) (u_n) متقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل.	0.5	
2) أ) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0+v_1+...+v_n)=\frac{v_0}{1-q}=18$ لأن : (v_n) متقاربة ، $\lim\limits_{n\to+\infty}q^{n+1}=0$	1	
ب) إذن: $q=\frac{18-6}{18}=\frac{2}{3}$ ، $v_n=6\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.5	
جـ) لدينا $u_{n+1}+3=\frac{2}{3}(u_n+3)$ ، $u_0+3=v_0=6$ ومنه (u_n+3) متتالية هندسية	0.75	
أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $u_0+3=6$ ومنه $u_n=v_n-3$ وعليه $u_n=6\left(\frac{2}{3}\right)^n-3$	0.25	
يمكن استعمال البرهان بالتراجع		

عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
<u>التمرين الرابع</u>: (07 نقاط)		
I) 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$ ، $y=5$ معادلة مستقيم مقارب	0.25×2	
2) $f'(x)=6(2x-3)e^{-x}$ ، إشارته	1	
f متناقصة تماما على $[0\,;1,5]$ ومتزايدة تماما على $[1,5\,;+\infty[$	0.25	
جدول التغيرات	0.75	07

x	0		$1,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	$\searrow$	$f(1,5)$	$\nearrow$	5

3) رسم (C_f)



عناصر الإجابة	مجزأة	مجموع
4) أ) الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;1,5]$ و $f(1,5)<3,5<f(0)$ ومنه	0.5	
$f(x)=3,5$ تقبل في $]0;1,5[$ حلا وحيدا α		
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,5\,;+\infty[$ و $f(1,5)<3,5<5$ ومنه		
$f(x)=3,5$ تقبل في $]1,5\,;+\infty[$ حلا وحيدا β	0.5	
$f(0,7)\simeq 3,8$ $f(0,8)\simeq 3,39$ ومنه $0,7<\alpha<0,8$	0.5	
$f(2,9)\simeq 3,42$ $f(3)\simeq 3,5$ ومنه و $2,9<\beta<3$	0.5	
ب) $f(x)\leq 3,5$ تكافئ $\alpha\leq x\leq\beta$		
5) أ) من $g'(x)=h(x)$ نجد $a=12$ ، $b=6$	0.75	
ب) $F(x)=(12x+6)e^{-x}+5x$	0.5	
II) 1) كمية المنتوج 1,5 طن وتكلفتها هي 2,32 مليون دينار	0.5	
2) كميات المنتوج التي من أجلها $C_M\leq 3,5$ هي x حيث: $\alpha\leq x\leq\beta$	0.25	
3) أ) $C'_T(x)=f(x)$ ومنه $C_T(x)=(12x+6)e^{-x}+5x+k$	0.25	
ب) من $C_T(0)=2$ نجد $k=-4$	0.25	