الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة : 2016

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) بيّن أنّ المستويين (P) و (P') متقاطعان.

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق : $d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(P')\right)$ حيث $d\left(M,(P)\right)$ المسافة بين النقطة M والمستوي (P) ، $d\left(M,(P')\right)$ المسافة بين M و (P').

3) تحقّق أنّ النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ).

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب.

أ - جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH').

ب - استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H'.

5) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثمّ احسب مساحة المثلث AHH'.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ).

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـِ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضحـا خطوط الإنشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<4$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$

ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$.

أ - اكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) احسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ - بيّن أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثمّ المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$.

7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب - احسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي ($n>1$).

جـ - عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإنّ : $I_n>2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$.

(Δ) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \end{cases}$; $(k\in\mathbb{R})$.

1) أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له.

ب) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان ، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما.

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ').

أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية له.

ب) بيّن أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P).

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

أ) أثبت أنّ المجموعة (P') هي مستوٍ ثمّ تحقق أنّ $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له.

ب) عيّن إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب.

جـ) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 3$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dots+\dfrac{1}{u_n}$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

جـ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1{,}52<\alpha<-1{,}51$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $1cm$) .

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.(حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}38$) .

د) عيّن دون حساب: $\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتّى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني

<table>
<tr><th colspan="2">العلامة</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th></tr>
<tr><th>مجموع</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td rowspan="8">04</td><td></td><td><u>التمرين الأوّل:</u> (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>1) $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P)، $\overrightarrow{n_{(P')}}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P').
$\overrightarrow{n_{(P)}}$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطين خطيا ومنه (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>2) $d(M,(P))=d(M,(P'))$ معناه $\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{4+1+1}}$ أي
$|2x+y-z+1|=|x-2y+z-2|$ أي $x+3y-2z+3=0$ أو $3x-y-1=0$. ومنه
مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتيهما: $x+3y-2z+3=0$ و $3x-y-1=0$.</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>3) $A(1;2;0)$، $3x_A-y_A-1=0$ أو $d(A,(P))=d(A,(P'))=\frac{5}{\sqrt{6}}$ ومنه $A\in(\Gamma)$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>4) أ. $(AH):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ ؛ $(AH'):\begin{cases}x=t'+1\\y=-2t'+2\\z=t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$.
(تقبل أيّ تمثيلات وسيطية صحيحة) .</td></tr>
<tr><td>01</td><td>ب . نعوّض في معادلة (P): نجد $t=-\frac{5}{6}$ و منه $H\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$.
نعوّض في معادلة (P'): نجد $t'=\frac{5}{6}$ و منه $H'\left(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>5) $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$.</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>المثلث AHH' متساوي الساقين $AH=AH'$ ومنه $S_{AHH'}=\frac{1}{2}(HH'\times AI)(u.a)$
$\overrightarrow{HH'}\left(\frac{15}{6};-\frac{5}{6};0\right)$ ؛ $HH'=\frac{5\sqrt{10}}{6}$ ؛ $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{5}{12};-\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ و منه : $AI=\frac{5\sqrt{14}}{12}$ ،
وبالتالي $S_{AHH'}=\frac{25}{72}\sqrt{35}(u.a)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">02</td><td></td><td><u>التمرين الثاني:</u> (05 نقاط)</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>I) 1) أ . $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.</td></tr>
<tr><td>0,25
0,25</td><td>ب . من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$ إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$
. <u>جدول التغيّرات</u>:</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>2) $\begin{cases}y=f(x)\\y=x\end{cases}$ أي $\begin{cases}\sqrt{2x+8}=x\\x\ge0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x^2-2x-8=0\\x\ge0\end{cases}$
($x_1=-2$ مرفوض) ، $x_2=4$ إذن نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) هي: $A(4;4)$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>3) رسم (C_f) و (Δ):</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>II) 1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل .</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">العلامة</th><th rowspan="2">عناصر الاجابة (الموضوع الأوّل)</th></tr>
<tr><th>مجموع</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td rowspan="7">03</td><td>0,25</td><td>2) التخمين: نلاحظ $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ إذن يبدو أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما وأنها متقاربة وتتقارب نحو العدد 4 .</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>3) أ . لدينا $u_0 = 0$ ومنه $0 \le u_0 < 4$
نفرض أنّ $0 \le u_n < 4$ و منه $f(0) \le f(u_n) < f(4)$ أي $0 \le 2\sqrt{2} \le u_{n+1} < 4$
أي $0 \le u_{n+1} < 4$ وهذا هو المطلوب.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>ب . من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 8} - u_n = \dfrac{(4-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$ بما أن
$0 \le u_n < 4$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ وعليه فالمتتالية (u_n) متزايدة تماما.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>جـ . من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n+8} = \dfrac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$
$4 + \sqrt{2u_n+8} \ge 4$ ومنه $\dfrac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}} \le \dfrac{1}{4}$ إذن $4 - u_{n+1} \le \dfrac{2(4-u_n)}{4}$
و بالتالي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $4 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(4-u_n)$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>$4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0)$؛ $4-u_2 \le \frac{1}{2}(4-u_1)$ ؛ ... ؛ $4-u_n \le \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$ بالضرب طرف إلى
طرف نجد: $(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (4-u_0)(4-u_1)...(4-u_{n-1})$
إذن $4 - u_n \le \dfrac{1}{2^n}(4-u_0)$ (تقبل أيّ طريقة أخرى) .</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>د) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}(4-u_0) = 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $0 < 4 - u_n \le \dfrac{1}{2^n}(4-u_0)$ إذن
$\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">02,75</td><td></td><td><u>التمرين الثالث:</u> (04,5 نقطة)</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>1) $z' = z$ معناه $z - 2 = z(z-1)$ مع $z \ne 1$
أي $z^2 - 2z + 2 = 0$ مع $z \ne 1$ ؛ $\Delta = (2i)^2$ و $z_1 = 1 - i$ ، $z_2 = 1 + i$.</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>2) أ . $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>ب - $\dfrac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، R الدوران الذي مركزه O و $\dfrac{\pi}{2}$ زاوية له. (تُقبل أي طريقة أخرى).</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>3) $z' \ne 0 : \arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-z_C}{z-z_D}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ، $(k \in \mathbb{Z})$
أو $z' = 0$ أي $z = 2$ و $M = C$.
إذن (Γ) مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة D. (تُقبل أي طريقة أخرى).</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>إنشاء المجموعة (Γ):</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
4) أ - $S=h\circ R$ ؛ h تحاك مركزه O نسبته 2 و R دوران مركزه O زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.	0,50	01,75
ب - $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z'=2iz$.	0,25	
جـ - $(\Gamma')=S(\Gamma)$ إذن (Γ') هي الدائرة التي قطرها $[C'D']$ باستثناء النقطة D' حيث $C'=S(C)$ و $D'=S(D)$ أي $z_{C'}=4i$ و $z_{D'}=2i$. (تُقبل أي طريقة أخرى).	0,75	
- إنشاء (Γ').	0,25	
التمرين الرابع: (06,5 نقطة)		06
I) 1) $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$ ؛ إشارة $g'(x)$ على $]0;+\infty[$: x: 0 ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $+\infty$ ؛ $-$ 0 $+$	0,50	
الدالة g متناقصة تماما على $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.	0,25	
2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1,85$ ؛ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $g(x)>0$.	0,5	
II) 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	0,50	
2) أ . من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{g(x)}{x^2}$.	0,25	
إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$: إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.	0,25	
ب . جدول تغيّرات الدالة f .	0,25	
3) معادلة المماس لـ (C) عند النقطة التي فاصلتها 1 هي : $(T): y=2x-2$.	0,25	
4) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) عند $+\infty$ معادلة له : $y=x-1$.	0,25	
ب . وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ): إشارة $f(x)-(x-1)=\frac{\ln x}{x}$ و الوضعية	0,50	
5) رسم المستقيمين (T) ، (Δ) و المنحنى (C).	0,75	
6) أ . $y_A=mx_A-m$ أي $0=m\times 1-m$	0,25	
ب . المناقشة بيانيا: من أجل كل m من $\mathbb{R}$ ، المستقيم ذو المعادلة $y=mx-m$ يشمل النقطة $A(1;0)$. (Δ_m) معامل توجيهه m و (Δ) معامل توجيهه 1 و (T) معامل توجيهه 2 . – إذا كان $m\leq 1$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا. – إذا كان $1<m<2$ أو $m>2$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين (1 و آخر) – إذا كان $m=2$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا (هو 1).	0,50	
7) أ . الدالة: $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$ هي أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.	0,25	
ب - $I_n=\left(\int_1^n\frac{\ln x}{x}dx\right)u.a=\left(\int_1^n\left(f(x)-(x-1)\right)dx\right)u.a$ أي: $I_n=\left(\frac{1}{2}(\ln n)^2\right)u.a$.	0,75	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
جـ - أصغر قيمة لـ n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ $I_n > 2$. $I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $n > e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي: $n_0 = 8$.	0,50	0,50
<u>التمرين الأول:</u> (04,5 نقطة)		04,5
1-أ) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') هو : $(\Delta'):\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+t \end{cases}$	0,50	
ب) نبين أنّ $(\Delta) \perp (\Delta')$ ، $(\Delta) \cap (\Delta') = \{C\}$ حيث : $C(1;1;0)$.	01	
2-أ) نبيّن أنّ : $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي لـ (P) يكفي أن نبيّن أنّ $\vec{n} \perp \vec{u}$ و $\vec{n} \perp \vec{v}$ معادلة المستوي (P) هي : $2x+11y-7z-13=0$.	0,50 0,50	
ب) نبيّن أنّ C هي المسقط العمودي لـ B على (P) لدينا: $C \in (P)$ و $\overrightarrow{BC}(2;11;-7) = \vec{n}$. (تُقبل أيّ طريقة أخرى صحيحة).	0,50	
3-أ) إثبات أنّ (P') هي مستو: المستوي (P') مزود بالمعلم $(B;\vec{w},\vec{v})$ حيث $B(3;12;-7)$ و $\vec{W}(0;12;-6)$ و $\vec{V}(-1;9;-11)$ والشعاعين $\vec{W}$ و $\vec{V}$ غير مرتبطين خطيا ، معادلة المستوي (P') هي: $-13x+y+2z+41=0$.	0,50	
ب) $(P') \cap (\Delta) = \{D\}$ و $(P') \cap (\Delta') = \{E\}$ حيث: $D(4;3;4)$ و $E(3;0;-1)$.	0,50	
جـ) حجم رباعي الوجوه $BCDE$: $V_{BCDE} = \frac{1}{3}S_{CDE} \times CB = \frac{1}{6} \times CD \times CE \times CB$. ومنه : $V_{BCDE} = 29\, u.v$.	0,50	
<u>التمرين الثاني:</u> (04 نقاط)		03,5
I) 1- أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.	0,25	
ب. $f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2}$ و منه $f'(x) > 0$ أي f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$. جدول تغيّرات الدالة f .	0,25 0,25	
2) تبيان أنّ: من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$.	0,25	
II) 1 - أ. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.	0,5	
ب. دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n-3)}{u_n+2} \geq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. بما أنّ (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.	0,25 0,25	
2- أ. البرهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ ، $v_0 = -2$.	0,50	
ب. من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، $u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.	0,75	
جـ. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.	0,25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
3- حساب S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3}\left[(1+1+...+1)-(v_0+v_1+...+v_n)\right]$ ومنه $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)-\left(v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$ أي أنّ : $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)+\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$.	0,50	0,50
التمرين الثالث: (04,5 نقطة)		04,5
1- حلول المعادلة في $\mathbb{C}$ هي: $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.	0,75	
2- أ) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي: $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_A=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_A=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.	0,75	
ب) تبيان أنّه، يوجد تشابه مباشر S لدينا: $z_A-z_B=i\sqrt{3}(z_C-z_B)$.	0,25	
ج) نسبة التشابه المباشر S هي $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ صيغته المركبة هي: $z'-z_B=i\sqrt{3}(z-z_B)$	0,75	
3- أ) لاحقة D : لدينا: $z_D-z_C=z_A-z_B$ ومنه: $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ الرباعي $ABCD$ مستطيل.	0,75	
ب) تعيّين المجموعة (E) لدينا: $\lvert z-z_A\rvert=\lvert\overline{z}-z_B\rvert$ تكافئ $\lvert z-z_A\rvert=\lvert\overline{z-z_C}\rvert$ وتكافئ $\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_C\rvert$ ومنه $AM=CM$ وعليه (E) هي المستقيم المحوري لـ $[AC]$	0,50	
ج) المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{3}$: لدينا النقطة A تنتمي إلى (Γ) لأنّ $AB=\sqrt{3}$.	0,75	
التمرين الرابع : (07 نقاط)		04
I) 1- أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$.	0,50	
ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x)=(-x^2+x+2)e^{-x}$ ومنه : $g'(x)\le 0$ من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$ و $g'(x)\ge 0$ من أجل $x\in[-1;2]$ و هذا يعني أنّ الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $[-1;2]$. جدول التغيّرات للدالة g .	01	
2- أ) تبيّان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1,52<\alpha<-1,51$. (مبرهنة القيم المتوسطة) .	0,75	
ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: $g(x)\le 0$ من أجل $x\in[\alpha;0]$. $g(x)\ge 0$ من أجل $x\in]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$.	0,25	
II -1- أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.	0,50	
ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.	0,25	
ج) تشكّيل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$.	0,25	
د) تعيّين : $\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$ ، النتيجة: المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم (يوازي حامل محور الفواصل) .	0,25 0,25	

<table>
<tr><th colspan="2">العلامة</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)</th></tr>
<tr><th>مجموع</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td rowspan="7">03</td><td>0,50</td><td>2− أ) تبيان أنّ (Δ) مستقيم مقار بمائل لـ(C_f):
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=0$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>ب) دراسة الوضعية النسبية: (C_f) يقطع (Δ) عند النقطتين $A(-1;1)$ و $B(-2;2)$
و (C_f) يقع فوق (Δ) من اجل $x\in]-\infty;-2]\cup[-1;+\infty[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) من أجل $x\in[-2;-1]$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>جـ) تبيّان أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيتاهما.
لدينا : $f''(x)=-g'(x)$ و منه $f''(x)=0$ من أجل $x=-1$ أو $x=2$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف هما: $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+\frac{12}{e^2}\right)$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>د) رسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>هـ) المناقشة البيانية: لدينا $(m-x)e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>III) 1− من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $H'(x)=h(x)$ ومنه $H(x)=\left(-x^2-5x-7\right)e^{-x}$.</td></tr>
<tr><td>0,25
+
0,25</td><td>2− حساب: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^{\lambda}=\left(-\lambda^2-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}+7$.
النتيجة $A(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: (C_f) ، $x=\lambda$ و $x=0$.
$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=7$.</td></tr>
</table>