

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$ .

1.a) Calculer  $P(1-i)$ . (0,5 pt)

b) Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on a :  $P(z) = (z-1+i)(z^2 + az + b)$ . (0,5 pt)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . (0,75 pt)

2) Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1+i, z_B = 1-i$  et  $z_C = 1+3i$ .

a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  et déterminer la nature du triangle  $ABC$ . (0,75 pt)

b) Déterminer l'affixe du point  $G$  barycentre du système  $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ . (0,25 pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16.$$

(0,25 pt)

d) Déterminer et construire l'ensemble  $\Delta$  des points  $M$  du plan tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16.$$

(0,25 pt)

3) Soit  $s$  la similitude directe de centre  $C$  qui transforme  $A$  en  $B$ .

a) Déterminer l'écriture complexe de  $s$ . (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de  $s$ . (0,5 pt)

4) On considère la parabole  $P$  de foyer  $A$  et de directrice  $(BC)$ .

a) Déterminer l'axe focal et le sommet de  $P$ . (0,5 pt)

b) Tracer  $P$  et  $P'$  dans le repère précédent où  $P' = s(P)$ . (0,25 pt)

c) Donner des équations cartésiennes de  $P$  et  $P'$  dans le repère précédent. (0,25 pt)

**Exercice 2 (5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1+x)e^{-x}$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.a) Vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . (0,75 pt)

b) Interpréter les limites précédentes. (0,5 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de  $f$  et représenter sa courbe  $(C)$ . (0,75 pt)

b) Calculer l'aire  $A$  du domaine plan délimité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = 0$ . (0,25 pt)

3) Soit la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$  où  $n$  est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout  $x \in [-1; 0]$  on a :  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$ . (0,5 pt)

4) Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} dx$ .

a) En interprétant graphiquement  $I_1$ , donner sa valeur (On pourra utiliser A.2)). (0,25 pt)

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ . (0,5 pt)

5) Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_n = e - U_n$ . (0,5 pt)

b) Démontre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . (0,5 pt)

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ . (0,5 pt)

**Exercice 3 (5 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{6e^x}$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.a) Vérifier que  $f$  est impaire et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (0,75 pt)

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,5 pt)

d) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  trois solutions dont l'une  $\alpha$  vérifie  $2,8 < \alpha < 2,9$ . (0,5 pt)

2.a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = -\frac{1}{9}$ . En déduire l'expression de  $(f^{-1})'(x)$ . (0,5 pt)

c) Soit  $x$  un réel quelconque. Exprimer l'intégrale  $I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2 + 1}} dt$  en fonction de  $(f^{-1})(x)$ . (0,25 pt)

3) Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Pour tout point  $M(x,y)$  on note  $r(M) = M'$  et  $r(C) = C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation  $r$  puis écrire les coordonnées  $x', y'$  de  $M'$  en fonction de  $x$  et  $y$ . (0,5 pt)

b) Montrer que  $(C_1)$  est la courbe représentative de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x^2 + 1}).$$
 (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $h(-x) = f^{-1}(x)$ . On note  $(C')$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère précédent. (0,25 pt)

4.a) Montrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  se coupent en deux points autres que l'origine. (0,25 pt)

b) Construire, dans le même repère les courbes  $(C)$  et  $(C')$  et calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes ( $\alpha$  est le nombre indiqué en 1.d). (0,5 pt)

**Exercice 4 (5 points)**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de centre  $G$  et de côté  $a$  ( $a > 0$ ).

$I, J, K$  et  $L$  sont les milieux respectifs des segments  $[BC], [AC], [AB]$  et  $[AI]$  et  $D$  le symétrique de  $I$  par rapport à  $J$ .

1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $B$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ . (0,5 pt)

b) Déterminer  $r_1(K)$  et déterminer le centre et un angle de  $r_1$ . (0,75 pt)

3) Soit  $r_2$  la rotation de centre  $K$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a) Déterminer  $r_2(B)$  et  $r_2(I)$ . (0,5 pt)

b) En déduire  $r_2(C)$ . (0,25 pt)

4.a) Montrer qu'il existe un unique antidépacement  $f$  du plan qui transforme  $B$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ . (0,5 pt)

b) Montrer que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

c) Caractériser la transformation  $g = f \circ r_1^{-1}$ . (0,25 pt)

5) On considère la transformation  $\sigma = r_2 \circ r_1$  et on pose  $\sigma(M) = M'$ .

a) Caractériser  $\sigma$ . (0,25 pt)

b) Montrer que si  $M \neq M'$  alors la droite  $(MM')$  passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) En déduire que le quadrilatère  $AMIM'$  est un parallélogramme. (0,25 pt)

6) Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M) = M_2$ .

Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan pour lesquels les points  $M, M_1$  et  $M_2$  sont alignés (On pourra utiliser l'angle  $(\vec{MG}; \vec{MK})$ ). (0,25 pt)

**Fin.**