République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

grandprof.net

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2017
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z :
$$(1+i)z^2-2(a+1)z-(-1+i)(a^2+1)=0$$ (1 pt)

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z\to z'=1-iz$ et $g: z\to z''=z-i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g. (0,5 pt)

Dans le reste de l'exercice on considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0=1-i$, $z_1=1-ia$ et $z_2=a-i$ où $a=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\left]0,2\pi\right[$

2) a- Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I, isocèle et direct. (0,5 pt)

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lors que α décrit l'intervalle $\left]0,\pi\right[$ (0,5 pt)

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. (0,5 pt)

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3=i\sin\alpha+ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3

a- Vérifier que $z_G=\frac{1+\cos\alpha}{3}+i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha\in\left]0,\pi\right[$, le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

b- Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. (0,5 pt)

Exercice 2 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral direct de coté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $A'=s_B(A)$.

1) a- Faire une figure illustrant les données que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. (0,75 pt)

b- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B)=A$ et $g(A')=B$. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,75 pt)

c- Soit r la rotation qui transforme C en B et J en K. Déterminer un angle et le centre de r. (0, 5 pt)

2) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I, et on pose $h=s\circ r$

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s. (0, 5 pt)

b- Soit Ω le centre de s. Montrer que $\Omega\in\Gamma$ et que les points Ω, A et I sont alignés. Placer alors Ω. (0, 5 pt)

c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h. (0, 5 pt)

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω, on pose $M'=s(M)$ et $M_1=r(M)$

a- Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle. (0, 5 pt)

b- Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0, 5 pt)

c- Montrer que les points M_1, M et M' sont alignés. (0, 25 pt)

4) On pose $M_0=A$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $M_{n+1}=s(M_n)$

a- Déterminer M_1 et construire M_2. (0, 25 pt)

b- Vérifier que $M_{2017}\in(\Omega B)$ (0, 5 pt)

c- Pour tout entier naturel n, on pose $L_n=M_nM_{n+1}$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}L_k$ exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}S_n$. (0, 5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer. (0,5 pt)

2) a- Dresser le tableau de variation de f_0. (0,5 pt)

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ? (0,5 pt)

3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (0,25 pt)

b- Déduire le tableau de variation de f_1 (0,25 pt)

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère. (0,5 pt)

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b- Calculer f_n' et dresser le tableau de variation de f_n. (0, 5 pt)

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx,\ n\in\mathbb{N}$

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (0,5 pt)

b- Vérifier que $u_0+u_1=1$ et que $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 (0,5 pt)

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f. (0, 75 pt)

b- Déduire que pour tout entier $n\geq 6$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n (0, 25 pt)

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. (0,5 pt)

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx\leq\frac{\ln k}{k^2}$ (0,5 pt)

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n\frac{\ln x}{x^2}dx$, $n\geq 2$. (0,5 pt)

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+....+\frac{\ln n}{n^2}$

a- Montrer que $S_n-\frac{\ln(2)}{(2)^2}\leq\int_2^n\frac{\ln x}{x^2}dx\leq S_n-\frac{\ln(n)}{(n)^2}$ (0,5 pt)

b- En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}\leq S_n\leq\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$ (0,25 pt)

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n=\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ 0\leq I_n\leq\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n (0,5 pt)

b- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (0,5 pt)

c- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$ (0,25 pt)

d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n). (0,5 pt)

Fin.