République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $25x-49y=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.	0.75 pt
b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).	1 pt
c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p\equiv 5[49]$.	0,25 pt
2° a) Justifier que si (x,y) est une solution de (E) alors $5x\equiv 1[7]$ et $y\equiv 0[5]$.	0.25 pt
b) Montrer que $5x\equiv 1[7]$ si et seulement si $x\equiv 3[7]$.	0.25 pt
3° a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par7 ?	0.25 pt
b) Existe-t-il un couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E) ?	0.25 pt

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+4i)z^2-(9-i)z-6+18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$	0.5 pt
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.	0.5 pt
c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\lvert z_C\rvert\le\lvert z_B\rvert\le\lvert z_A\rvert$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.	0.5 pt
d) Soit $A'=\text{bar}\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Vérifier que l'affixe de A' est $z_{A'}=-3+i$. Placer A'.	0.5 pt
2° On considère l'ellipse Γ de sommets A, A' et B.	
a) Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ.	0.5 pt
b) Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	0.5 pt
c) Préciser les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox).	0.5 pt
d) Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ.	0.5 pt

Exercice 3 (4 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{4}$ et $AB=2AD$.

On définit les points E, F, G et H tels que AFEB et ADGH soient des carrés directs.

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC]$, $[CG]$ et $[GA]$.

1° Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.	0.5 pt
2° Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $f=T\circ R_A$.	
a) Quelle est la nature de f ?	0.25 pt
a) Déterminer $f(D)$ puis caractériser f. Quelle est l'image du point F par f ?	0.5 pt
c) Justifier que les segments $[DF]$ et $[CG]$ sont perpendiculaires et de même longueur.	0.5 pt
3°a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en déduire que le triangle ECG est rectangle isocèle direct en C.	0.5 pt
b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme E en C et C en G.	0.25 pt
c) Vérifier que g est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite.	0.25 pt
4° Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.	
a) Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S.	0.5 pt
b) Montrer que le centre Ω de S appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 circonscrit respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer Ω.	0.25 pt
c) Montrer que $S(F)=G$ puis en déduire que $S(\Gamma_1)=\Gamma_2$.	0.25 pt
d) Soit M un point de Γ_1 et $M'=S(M)$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés.	0.25 pt

Exercice 4 (4 points)

1° a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-6y'+8y=0$.	0.25 pt
b) Déterminer la solution y_0 de (E) dont la courbe passe par le point $A(0,-1)$ et admet en ce point une tangente horizontale.	0.25 pt

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{4x}-2e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. — 0.75 pt

b) Dresser le tableau de variations de f. — 0.75 pt

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera. — 0.25 pt

b) Calculer et interpréter $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$ où g^{-1} est la réciproque de g. — 0.25 pt

c) Soit (C') la courbe de g^{-1}. Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un unique point B d'abscisse α tel que $-0,6<\alpha<-0,5$. — 0.25 pt

d) Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C'). — 0.5 pt

e) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$. — 0.25 pt

4° Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C), (C') et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S=2\int_{\alpha}^{0}(x-f(x))dx$. — 0.25 pt

b) Calculer la valeur de S en fonction de α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près. — 0.25 pt

Exercice 5 (5 points)

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x+1}-(x+1)\ln(x+1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. — 0.75 pt

2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de f'. — 0.5 pt

   b) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de $f'(x)$. — 0.25 pt

3. a) Dresser le tableau de variation de f. — 0.25 pt

   b) Tracer la courbe (C). — 0.25 pt

3. a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ et à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x (t+1)\ln(1+t)dt$. — 0.5 pt

   b) En déduire la primitive F de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0. — 0.25 pt

   c) Calculer l'aire A_n du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=n$, pour n un entier naturel $n\geq 1$. — 0.25 pt

Partie B :

Soit (U_n) la suite définie $\forall n\geq 1$ par $U_n=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{4}f(3)+...+\frac{1}{n}f(n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}f(k)$.

1° Posons $\forall n\geq 1$: $V_n=\frac{1}{n+1}f(n)$.

a) Vérifier que $\forall n\geq 1$, $V_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}-\ln(n+1)$. — 0.5 pt

b) En déduire que $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\ln(n!)$. — 0.25 pt

2° Notons $\forall n\geq 1$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $S'_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\forall k\geq 1$; $\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}$ puis en déduire que $\frac{1}{n}+\ln n\leq S_n\leq 1+\ln n$. — 0.5 pt

b) Montrer que $\forall k\geq 1$; $\frac{1}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2}\leq\frac{1}{k^2}$ puis en déduire que $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leq S'_n\leq 2-\frac{1}{n}$. — 0.5 pt

c) En déduire que $\forall n\geq 1$: $\frac{2}{n}-2\leq U_n+\ln((n-1)!)\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$. — 0.25 pt

- *Fin* -