

Exercice 1 (3 points)

1° On considère dans \mathbb{Z}^2 , l'équation (E): $7x - 5y = 1$

a) Justifier que le couple (3;4) est solution de (E) puis résoudre (E).

0.75 pt

b) Montrer que si (x;y) est une solution de (E) alors $\begin{cases} x \equiv 3 [5] \\ y \equiv 4 [7] \end{cases}$

0.75 pt

2° Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que

$$\begin{cases} A \equiv 4 [5] \\ A \equiv 3 [7] \end{cases}$$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (x;y) tel que

$$A = 7x + 3 = 5y + 4 \text{ où } (x;y) \text{ est une solution de (E)}$$

0.5 pt

b) En déduire que $A \in S$ si et seulement si $A \equiv 24 [35]$.

0.5 pt

c) Soit n et a deux entiers naturels ($0 < n < 9$) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme

$$\overline{374a}. \text{ Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.}$$

0.5 pt

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1° Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (7 + 10i)z + 5 - 10i$.

Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions $z_0; z_1$ et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ avec

$$\operatorname{Re}(z_0) < \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2).$$

1 pt

2° On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_0; z_1$ et z_2 .

a) Déterminer la nature du triangle ABC.

0.5 pt

b) Soit G le barycentre du système $\{(A,13); (B,-3); (C,2)\}$. Déterminer l'affixe de G.

0.25 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$13MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 12$$

0.5 pt

3° On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a) Déterminer le 2^{ème} sommet de H.

0.25 pt

b) Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme $x^2 - 3(y-2)^2 = -3$.

0.5 pt

c) Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.

1 pt

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - x \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.

0.5 pt

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

0.5 pt

2° a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.

0.5 pt

b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de f'(x).

0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f.

0.5 pt

3° a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

0.25 pt

b) Etudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elles se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse α avec $0,45 \leq \alpha \leq 0,46$ ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f).

0.5 pt

4° Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C) et (C').

0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive F qui s'annule en 1 de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

0.25 pt

- b) Exprimer en fonction de n et α les intégrales $K = \int_{\alpha}^1 f(t)dt$ et $I(n) = \int_1^{\alpha} f(t)dt$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n)$. 0.75 pt
- c) Dédire l'aire S du domaine plan fermé par les courbes (C) et (C') . 0.25 pt

Exercice 4 (4 points)

On considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a ($a > 0$). Soient D, E et F les milieux respectifs des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. On construit le carré direct $AGHD$ de centre O . Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC], [GH]$ et $[AD]$.

- 1° Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure. 0.25 pt
- 2° a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en C et E en D . 0.25 pt
- b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. 0.5 pt
- 3° a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant H en B et D en E . Préciser son angle. Soit Ω son centre. 0.5 pt
- b) Montrer que Ω appartient à la droite (CF) et au cercle de diamètre $[AB]$. 0.5 pt
- c) En utilisant les angles $(\overrightarrow{D\Omega}, \overrightarrow{DE})$ et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG})$ montrer que $\Omega \in (DG)$. Placer Ω . 0.5 pt
- 4° a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule qui transforme B en D et D en I . 0.25 pt
- b) Soit S' la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Déterminer $S'(B)$ et $S'(D)$. Caractériser S . 0.5 pt
- 5° On considère la suite (M_n) définie par $M_0 = B$ et $M_{n+1} = S(M_n)$.
- a) Démontrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle. 0.25 pt
- b) Déterminer la nature du triangle ABM_{2019} et calculer son aire en fonction de a . 0.5 pt

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

- 1° Etudier les variations de f et tracer sa courbe Γ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0.75 pt
- 2° Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0,7 < \alpha < 0,8$. 0.25 pt
- 3° Soit A l'aire du domaine délimité par Γ , (Ox) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \ln 3$.
- a) Montrer que $A = \int_{\alpha}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 0.25 pt
- b) En posant $t = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, montrer que $A = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{2dt}{t^2-1}$. 0.25 pt
- c) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{2}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$ et en déduire la valeur de A . 0.5 pt
- 4° Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_{\alpha}^{\ln 3} (f(t))^{2n} dt$ et $S_n = \sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.
- a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $\frac{\ln 3 - \alpha}{2^{2n}} \leq I_n \leq (\ln 3 - \alpha) \alpha^{2n}$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. 0.5 pt
- b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f'(x) = (f(x))^3 - f(x)$ (1). 0.25 pt
- c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1 + 2 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)$ puis en déduire I_1 . 0.5 pt
- 5° a) Montrer à l'aide de l'égalité (1) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \alpha^{2n} \right)$. 0.25 pt
- b) Montrer que $I_{n+1} = \ln \left(\frac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2^{2k}} - \alpha^{2k} \right)$. 0.25 pt
- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\alpha^{2k} - \frac{1}{2^{2k}} \right) \right) = \ln \left(\frac{3}{4(1-\alpha^2)} \right)$. 0.25 pt

Fin