République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Reforme
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2020
Session Normale
Epreuve : MATHEMATIQUES

Série : C & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $13x - 15y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer l'entier naturel p tel que le couple $(p+1\ ;\ p)$ soit solution de (E). — 0.5 pt

b) Résoudre l'équation (E). — 0.5 pt

2° Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5\ [13] \\ N \equiv 10[15] \end{cases}$$

a) Soit N un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $N = 13x + 5 = 15y + 10$ où $(x;y)$ est une solution de (E) — 0.5 pt

b) En déduire que $N \in S$ si et seulement si $N \equiv 70[195]$. — 0.5 pt

c) Déterminer le plus petit élément A de S qui est supérieur ou égal à 2000. — 0.5 pt

d) Soit n un entier naturel non nul. Supposons que le nombre A, de la question précédente, s'écrit COVID dans un système de base n, où les lettres C, O, V, I et D représentent des chiffres distincts de ce système. Justifier que n ne peut être, ni supérieur à 6, ni inférieur à 5 puis déterminer n et préciser l'écriture de A dans ce système. — 0.5 pt

Exercice 2 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 - (5+3i)z + 4 - 8i$

1° Calculer $P(-i)$ et En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. — 1 pt

2° On note A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_B| < |z_A| < |z_C|$.

a) Placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC. — 0,5 pt

b) Soit G le barycentre du système $\{(A;9),(B;-2),(C;6)\}$. Vérifier que $z_G = 2i$ puis placer G. — 0,5 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $9MA^2 - 2MB^2 + 6MC^2 = 195$ — 0,5 pt

d) Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que $3MA^2 - 5MB^2 + 2MC^2 = 65$ — 0,5 pt

e) Préciser la position relative entre les deux ensembles E et F. — 0,25 pt

3° Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = mz + (2-2m)i$ où m est un nombre complexe.

a) Résoudre l'équation $z' = z$ (discuter suivant les valeurs de m). — 0,25 pt

b) Déterminer la valeur de m pour que $f(B) = A$, puis caractériser f dans ce cas. — 0,5 pt

Exercice 3 : (4 points)

On considère un triangle isocèle direct ABC tel que $BC = 2a$ et $AB = AC = 3a$, a étant un réel strictement positif donné et soit $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \theta[2\pi]$. On note A' le milieu de $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC et B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

1°Faire une figure. — 1 pt

2° a) Montrer les égalités suivantes $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB'$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CB \times CA'$. — 0.5 pt

b) En déduire la distance $B'C$ puis calculer la distance $B'A$. — 0.5 pt

c) Justifier que $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\dfrac{7}{2}$ puis en déduire que $B' = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 2 & 7 \\ \hline\end{array}$. — 0.5 pt

d) On suppose que $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 7 & 7 \\ \hline\end{array}$.

Montrer que G appartient à chacune des hauteurs (AA') et (BB') puis reconnaitre le point G. — 0.5 pt

3°a) Montrer que les points A, B, A' et B' sont cocycliques, de même que les points H, C, A' et B'. — 0.5 pt

b) Justifier que $(\overrightarrow{HA'},\overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [\pi]$ puis en déduire que $(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB}) = \theta\ [\pi]$. — 0.5 pt

Exercice 4: (4 points)

I- 1° On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0)=0$ et $\forall x>0$ $f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.(on pourra écrire $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln(x)$) | 0,5pt

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$. | 0,5pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x>0$, $f'(x)>0$. | 0,5pt

2° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement . | 0,25pt

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et tracer sa courbe (C) | 0,5pt

II- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-\frac{1}{x}(f(x)-1)=\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1° a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a : $g(n)=\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$. | 0,25pt

b) Justifier que $\forall n\geq 1$, on a : $\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{n}$ et en déduire que $0\leq g(n)\leq\frac{1}{n(n+1)}$. | 0,5pt

2° Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on définit la suite (U_n) par :

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$$

a) Montrer que $\forall n\geq 1$, $0\leq g(n)+g(n+1)+g(n+2)+\cdots+g(2n)\leq U_n$. | 0,25pt

b) Justifier que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ et en déduire que $\forall n\geq 1$, $U_n=\frac{(n+1)}{n(2n+1)}$ | 0,5pt

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[g(n)+g(n+1)+\cdots+g(2n)\right]=0$. | 0,25pt

Exercice 5 : (5 points)

1° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. | 1 pt

b) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative (C) . | 1 pt

2° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[-1;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à déterminer. | 0,5 pt

b) Tracer dans le repère précédent la courbe (C') de la fonction g^{-1} où g^{-1} est la réciproque de g. | 0,25 pt

3° Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n=\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!}dx$ et $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in[-2;0]$ on a : $0\leq\frac{(x+2)^n}{n!}e^{-x}\leq\frac{2^n}{n!}e^2$. | 0,25 pt

b) Justifier à l'aide d'une intégration par parties que $I_1=e^2-3$. | 0,5 pt

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ puis en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=e^2-U_n$. | 0,5 pt

4° Soit $v_n=\frac{2^n}{n!}$. Montrer que $\forall n\geq 2$, $v_{n+1}\leq\frac{2}{3}v_n$ puis en déduire que $\forall n\geq 2$, $v_n\leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et préciser la limite de (v_n). | 0,5 pt

5° En utilisant la question 3° a), justifier que $0\leq I_n\leq 2e^2\times v_n$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. | 0,5 pt

Fin