République Islamique de Mauritanie Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle Direction des Examens et des Concours	**BACCALAUREAT 2019** Session Normale Epreuve de MATHEMATIQUES	Série : Sciences de la Nature Coefficient : 6 Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_n = 3^n + n - 1$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	0.5 pt
2	La suite (u_n) est	convergente	divergente	bornée	0.5 pt
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. alors la valeur de S_n est	$\frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{-2} + \frac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	0.5 pt
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$	0.5 pt
5	Le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	$n=6$	$n=7$	$n=8$	0.5 pt
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$, alors la valeur de T_n est	$\frac{(n+1)^2}{2}\ln 3$	$\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$	$\frac{n^2+n}{2}\ln 3$	0.5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$ — 0.5 pt

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$. — 0.5 pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.

a) Placer les points A, B et C . — 0.5 pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25 pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. — 0.75 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. — 0.75 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$. — 0.75 pt

4° On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique. — 0.25 pt

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}. — 0.25 pt

Exercice 3 (6 points)

A. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$. — 0.5 pt

2° Soit h la solution de (E) qui vérifie $h(0) = -1$ et $h'(0) = -1$. Montrer que $h(x) = (x-1)e^{2x}$. — 0.5 pt

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=h(x)+2x-2=(x-1)(2+e^{2x})$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 1 pt

b) Montrer que la droite D d'équation $y=2x-2$ est asymptote à (C) et étudier leurs positions relatives. 0.75 pt

2° a) Montrer que $f'(x)=2+(2x-1)e^{2x}$ et en déduire l'expression de $f''(x)$. (f' et f'' étant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f). 0.5 pt

b) Montrer que le point $A(0;-3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). 0.5 pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. 0.5 pt

d) Dresser le tableau de variation de f. 0.5 pt

3° a) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à la droite D. Ecrire une équation de T. 0.5 pt

b) Tracer D ,T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. 0.5 pt

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x-1=me^{-2x}$. 0.25 pt

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0.5 pt

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. 0.5 pt

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution α telle que $1,7<\alpha<1,8$. 0.5 pt

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. 0.25 pt

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. 1 pt

b) Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=g(x)$, où f' est la dérivée de f. 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. 0.5 pt

3°a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°c). 0.25 pt

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox). 0.25 pt

4° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J=]-\infty;f(\alpha)]$. 0.25pt

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$. 0.25 pt

c) Construire Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ où Γ' est la courbe de h^{-1}. 0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx=\frac{e^2-3}{4}$. 0.25pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$ 0.5 pt

Fin