République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2021
Session Normale
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{2}{9}u_n$.

Soient $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ et $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_3 est	$\frac{17}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{14}{9}$	0,5 pt
2	La suite (u_n) est	Croissante	Décroissante	Non monotone	0,5 pt
3	La suite (v_n) est	Arithmétique	Géométrique	Ni arithmétique, ni géométrique	0,5 pt
4	Le terme général de (v_n) est	$2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$2+\frac{2n}{3}$	$2-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5 pt
5	La valeur de S_n est	$6-4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{(n+1)(n+6)}{3}$	$2n-1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5 pt
6	La suite (v_n)	Converge vers 0	Converge vers 1	Diverge	0,5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (5 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - 3z - 1 - 8i$.

1° a) Calculer $P(-i)$. 0,5pt

b) Déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = -1+2i$ et $z_C = 2+3i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer la nature du triangle ABC. 0.75pt

b) Placer le point D d'affixe $z_D = 3$ et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$. 0,5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 2+3i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-2-3i}$

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ 0,5 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$ 0,5 pt

c) Justifier que les ensembles Γ_1 et Γ_2 passent par les points B et D. 0,25pt

4° Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = (z_B - i)^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n et $d_n = |z_n|$

a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles M_n appartient à l'axe des abscisses. 0,25pt

b) Montrer que (d_n) est une suite géométrique et en déduire que $OM_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$ 0,5pt

c) Exprimer en fonction de n la valeur de la somme $L_n = OM_1 + OM_2 + ... + OM_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. 0,25pt

Exercice 3 : (5,5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (x+2)e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 1cm.

1° a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. — 0,75pt

b) Justifier que $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$ puis calculer interpréter graphiquement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. — 0,75pt

2° Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f. — 0,75pt

3° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Justifier que $-2,2 < \alpha < -2$ — 0,75pt

4° a) Montrer que $I(0;3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). Ecrire une équation de la tangente T à (C) en ce point. — 0.5pt

b) Construire la courbe (C) et sa tangente T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0,5pt

5° Soit S l'aire, en cm^2, de la partie du plan fermée par la courbe (C) et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx$. — 0,5pt

b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + h'(x)$, où $h(x) = -(x+3)e^{-x}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$. — 0,5pt

c) Justifier que $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+2}$ et en déduire que $S = \frac{-(\alpha+3)^2}{\alpha+2}$. — 0,5pt

Exercice 4 : (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$ et étudier son signe sur cet intervalle. — 0,5pt

b) Calculer $g(1)$, puis en déduire que g est positive sur I. — 0,5pt

2° a) Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement. — 0,75pt

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à Γ et étudier leur position relative. — 0,5pt

3° a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ (g étant la fonction définie en 1°). — 0,5pt

b) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f. — 0,5pt

c) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse β. Vérifier que $1,47 < \beta < 1,48$ — 0,5pt

4° a) Déterminer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse e. — 0,5pt

b) Construire la courbe Γ, l'asymptote Δ ainsi que la tangente T dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ — 0,5pt

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(m+2)x = 2\ln x$. — 0,5pt

5° a) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à déterminer. — 0,5pt

b) Vérifier que $f^{-1}(-1) = 1$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$, où f^{-1} est la réciproque de f. — 0,5pt

c) Construire la courbe (Γ') de f^{-1} dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. — 0,25pt

Fin.