République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2005

Session Complémentaire

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$ où θ est un paramètre réel appartenant à $[0,2\pi[$.

1.a) Résoudre l'équation (E) et on note z_1 et z_2 ces deux solutions. **(1pt)**

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre θ, le module et un argument de z_1 et de z_2. **(0,5pt)**

2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et soient M_1 et M_2 les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que lorsque θ décrit $[0,2\pi[$ alors les points M_1 et M_2 décrivent un cercle Γ de centre $A(1,0)$ dont on déterminera le rayon, et que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. **(1pt)**

b) Représenter M_1 et M_2 sur Γ, dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$. **(0,5pt)**

3. Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue complexe z : $(z-1)^n - e^{2i\theta} = 0$ où θ est un paramètre réel appartenant à $[0,2\pi[$.

a) Déterminer les nombres (z_k) solutions de l'équation (E_n). **(0,25pt)**

b) Montrer que $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = n$. **(0,25pt)**

c) Montrer que les points M_k d'affixes z_k appartiennent au cercle Γ. **(0,25pt)**

d) On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$. Calculer S_n en fonction de θ et n, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2\pi$, interpréter cette limite. **(0,25pt)**

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle et isocèle en A. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. Le points D l'image du point K par la réflexion d'axe (AC).

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,75pt)**

b) Soit la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, déterminer $r(B)$ et $r(J)$. En déduire que (BJ) et (CD) sont perpendiculaires. **(1pt)**

c) Soit la similitude directe s de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$, déterminer $s(B)$ et $s(C)$. En déduire que (BC) et (DJ) sont perpendiculaires. **(1pt)**

d) Déduire de ce qui précède que J est l'orthocentre du triangle BCD. **(0,5pt)**

2. Soit F le point d'intersection des droites (BJ) et (CD). Montrer que les points A, D, F et J sont cocycliques et que les points A, B, C et F le sont aussi. **(0,25pt)**

3. On considère le cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M du plan, on pose $s(M) = M'$. Déterminer le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit Γ_1. **(0,5pt)**

4. Pour tout point M du plan distinct de A, on désigne par N le milieu du segment $[MM']$.

a) Calculer $\dfrac{AN}{AM}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$ à une mesure constante α lorsque M varie. (0,25p

b) Vérifier que $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) En déduire que le point N est l'image du point M par une similitude directe σ que l'on caractérisera

d) Déterminer et construire, sur la figure précédente, le lieu géométrique Γ de N lorsque M décrit Γ_1. (0,25pt

Problème (11 points)

Partie A

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose:

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$$

1.a) Donner une primitive de la fonction S_n sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout $x \neq -1$ et $n \geq 2$ on a:

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}; \qquad [1]$$

2.a)En déduire que :

$$\forall x > -1,\ \forall n \geq 2; \qquad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \qquad [2].$$

b) Déduire de $[2]$ que:

$$\forall x > 0; \qquad x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \qquad [3],$$ (0,5pt)

$$\forall x \in]-1,0[; \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \qquad [4].$$

c) En utilisant $[3]$ et $[4]$ démontrer que: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(0,5pt)

1.a) Montrer que f est continue au point d'abscisse $x_0 = 0$.

b) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ puis calculer $f'(0)$. (On pourra utiliser A.2.c)).

2. Soit la fonction numérique u définie par : $u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$.

a) Etudier les variations de u et montrer que : $\forall x > -1, \quad u(x) \leq 0$. (0,5pt)

b) Vérifier que : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[, \qquad f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2(x+1)}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C

On considère la fonction numérique g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(\frac{1}{x}) = x\ln(\frac{1+x}{x}), & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que g est définie sur $D =]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[$. (0,25pt)

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite du point d'abscisse $x_0 = 0$. (0,5pt)

2.a) Calculer $g'(x)$ puis vérifier que g est croissante sur D. (0,5pt)

b) Du tableau de variation de f, déduire celui de g. (0,5pt)

c) Construire la courbe (C). (0,25pt)

3. On considère la transformation σ du plan dans lui même qui associe à tout point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ tel que: $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$.

On pose $\sigma(C) = (C')$ et soit h la fonction numérique dont la courbe représentative est (C'), dans le repère précèdent.

a) Déterminer l'expression de $h(x)$ et vérifier que $h(x) = g(-x-1)$. (0,5pt)

b) Du tableau de variation de g déduire celui de h. (0,5pt)

c) Vérifier que σ est la réflexion d'axe Δ d'équation $x = \frac{-1}{2}$. Déduire la construction de (C') à partir de (C) dans le repère précèdent. (0,5pt)

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on pose $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $V_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $g(n) \leq 1 \leq h(n)$, en déduire que $U_n \leq e \leq V_n$. (0,5pt)

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1+\frac{1}{n}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,25pt)

c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. (0,25pt)

Fin.