Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2006

Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la parabole (P) de foyer $F(0,2)$ et de directrice la droite (D) d'équation : $y=4$. On désigne par (Δ) la droite parallèle à (D) et passant par le point F.

1. Soit M un point de (P) d'ordonnée inférieure strictement à 2 et H le projeté orthogonal de M sur (Δ).

a) Montrer que : $MF - MH = 2$. (0,5pt)

b) En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'intersection de (P) avec la droite (Δ). (0,5pt)

2.a) Trouver une équation de (P) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ puis tracer (P). (0,5pt)

b) Soit (D_m) une droite variable d'équation $y=mx+2$ où m est un paramètre réel. La droite (D_m) coupe (P) en S et T. Montrer que, le milieu I de $[ST]$, appartient à une conique fixe (P') dont on donnera une équation dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

3. Soit l'ellipse (E) d'excentricité $e=\dfrac{1}{3}$, de foyer $F(0,2)$ et de directrice associée la droite (D).

a) Justifier que (P) et (E) n'ont aucun point commun. (0,5pt)

b) Trouver une équation de (E) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0, 5pt)

c) Déterminer les sommets de (E), son deuxième foyer F' et sa deuxième directrice (D'). (0,5pt)

d) Tracer F', (D') et (E) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme D en A et J en I. Vérifier que $f=S_{(DB)}\circ t_{\overrightarrow{JK}}$ où $t_{\overrightarrow{JK}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$ et $S_{(DB)}$ est la réflexion d'axe (DB). (0,5pt)

2. Caractériser l'antidéplacement f :

a) En décomposant convenablement la translation $t_{\overrightarrow{JK}}$ (0,5pt)

b) En exploitant l'écriture complexe de f dans le repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ (0,5pt)

3. Montrer que : $f(A)=B$ (0,25pt)

4. On pose : $g=S_{(AI)}\circ f$. Montrer que g est un déplacement que l'on caractérisera. (0,5pt)

5. Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Donner le rapport et un angle de S. (0,5pt)

b) Préciser $S[(BC)]$ et $S[(BD)]$, en déduire $S(B)$. (0,25pt)

c) Montrer que : $S(A)=J$. (0,25pt)

d) Soit Ω le centre de S. Montrer que les points Ω, I, B et C sont cocycliques. (0,25pt)

6.a) Donner la nature de $S\circ S$ et préciser ses éléments caractéristiques. (0,5pt)

b) En déduire que Ω est le barycentre des deux points $(B,1)$ et $(J,4)$ puis construire Ω. (0,25pt)

7. Soit E le point du plan défini par : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BA}$ et soit S' la similitude directe de centre B qui transforme C en E. Caractériser $S\circ S'$ et montrer que $\Omega E=2\Omega D$ et que $(\Omega E)\perp(\Omega D)$. (0,75pt)

Problème (11 points)

Partie A

Soit $\mathbf{f}$ la fonction de variable réelle $\mathbf{x}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} & x\geq 0\\ \dfrac{-\ln(1-x)}{2x} & x<0\end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $\mathbf{2cm}$.

1. Etudier la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$. **(0,25pt)**
2. Justifier que $\mathbf{f}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$. Donner la valeur de la dérivé à droite de $\mathbf{0}$. **(0,25pt)**
3. Soit $\mathbf{h}$ un réel strictement négatif. On définit sur $]-\infty,0]$ la fonction $\mathbf{u}$ par :

$$u(x)=\left(\frac{\ln(1-h)+h}{h^2}\right)x^2-\ln(1-x)-x$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $\mathbf{c}$ appartenant à $]h,0[$ tel que :

$$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2}=\frac{1}{2(c-1)}.$$ **(0,5pt)**

b) Prouver que : $\lim\limits_{h\mapsto 0^-}\dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$ **(0,25pt)**

c) Prouver que $\mathbf{f}$ est dérivable à gauche en $\mathbf{0}$ et donner la valeur de la dérivé à gauche en $\mathbf{0}$. **(0,25pt)**

d) $\mathbf{f}$ est elle dérivable en $\mathbf{0}$? **(0,25pt)**

4.a) Calculer $\mathbf{f'(x)}$ pour $\mathbf{x>0}$. En déduire le sens de variation de $\mathbf{f}$ sur $[0,+\infty[$. **(0,25pt)**

b) Calculer $\mathbf{f'(x)}$ pour $\mathbf{x<0}$. **(0,25pt)**

c) Pour $\mathbf{x\leq 0}$, on pose : $v(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$.
Etablir le tableau de variation de la fonction $\mathbf{v}$ puis déterminer le signe de $\mathbf{f'(x)}$ pour $\mathbf{x<0}$. **(0,25pt)**

d) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$ en y précisant les limites de $\mathbf{f}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,25pt)**

5. Tracer la courbe (C_f) dans le repère précédent $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,25pt)**

Partie B

1. Justifier que $\mathbf{f}$ possède des primitives sur $[0,+\infty[$. **(0,25pt)**
2. Soit la fonction $\mathbf{G}$ définie sur $I=[\pi/4,\pi/2[$ par : $G(x)=\int_0^{\ln(\tan x)}f(t)dt$.

a) Calculer $G(\pi/4)$ et $G'(x)$ pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$. **(0,5pt)**

b) Prouver que : $\forall x\in I,\quad G(x)=x-\pi/4$. **(0,25pt)**

c) Soit β un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel α de $\mathbf{I}$ tel que : $\beta=\ln(\tan\alpha)$. **(0,25pt)**

d) On suppose que si β tend vers $+\infty$ alors α tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer en $\mathbf{cm^2}$, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta$ puis calculer $\lim\limits_{\beta\mapsto+\infty}A(\beta)$. **(0,75pt)**