République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire et Supérieur
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2010

Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout réel $\mathbf{t}$ et pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ on pose : $\mathbf{G_0(t) = \int_0^t e^x dx}$ et $\mathbf{G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx}$.

1.a) Démontrer que $\mathbf{G_n(t)}$ existe pour tout entier naturel et donner l'expression $\mathbf{G_0(t)}$ et de $\mathbf{G_1(t)}$ en fonction de t. **(1,25)**

b) Démontrer que pour tout réel $\mathbf{t \geq 0}$ on a : $\mathbf{\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2e^t}$. **(0,5)**

c) Démontrer que pour tout réel $\mathbf{t \leq 0}$ on a : $\mathbf{\frac{1}{2}t^2e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2}$. **(0,5)**

d) En déduire le calcul de la limite : $\mathbf{\lim\limits_{t \to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}}$. **(0,25)**

2) Pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ on pose : $\mathbf{I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx}$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ on a : $\mathbf{G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)}$. En déduire $\mathbf{I_n}$ en fonction de $\mathbf{I_{n-1}}$ pour $\mathbf{n \geq 1}$. **(0,5)**

b) Montrer que la suite $\mathbf{(I_n)}$ est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? **(0,5)**

c) Donner un encadrement de $\mathbf{I_n}$ qui permet de calculer $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n}$ et calculer cette limite. **(0,5)**

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{u},\vec{v})}$. Pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on pose :
$\mathbf{P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-6+16i)z + 12 - 4i}$.

1.a) Calculer $\mathbf{P(1+i)}$. **(0,25)**

b) Déterminer deux nombres $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ tels que pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on a :
$\mathbf{P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)}$. **(0,5)**

c) Déterminer les solutions de l'équation $\mathbf{P(z) = 0}$. **(0,5)**

2.a) Placer les points **A**, **B** et **C** images des solutions de l'équation $\mathbf{P(z) = 0}$ sachant que $\mathbf{|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|}$. Déterminer la nature du triangle **ABC**. **(0,5)**

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe **s** de centre **A** qui transforme **C** en **B**. **(0,25)**

c) Donner l'expression complexe de **s**. Déterminer le rapport et un angle de **s**. **(0,75)**

3) On considère la transformation **f** qui à tout point **M** d'affixe **z** associe le **M'** d'affixe $\mathbf{z'}$ tel que :
$\mathbf{z' = \frac{1-i}{2}z + i}$. Pour tout entier naturel **n** on pose : $\mathbf{f^1 = f}$ et $\mathbf{f^n = f \circ f^{n-1}}$. On définit une suite de points $\mathbf{(M_n)}$ par $\mathbf{M_0 = C}$ et $\mathbf{M_n = f^n(M_0)}$.

a) Reconnaître la transformation **f** et déterminer ses éléments caractéristiques. **(0,5)**

b) Déterminer la nature du triangle $\mathbf{AM_nM_{n+1}}$. **(0,25)**

c) Calculer en fonction de **n** la somme : $\mathbf{S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}}$. **(0,25)**

d) Calculer la limite $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$ et l'interpréter. **(0,25)**

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct $\mathbf{ABC}$ de coté $\mathbf{a}$, $\mathbf{(a > 0)}$. Soient $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $\mathbf{[AB]}$, $\mathbf{[BC]}$ et $\mathbf{[CA]}$.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,5)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r_1}$ qui transforme **I** en **C** et **B** en **J**. **(0,25)**

b) Préciser l'angle et le centre $\mathbf{\Omega}$ de $\mathbf{r_1}$. **(0,5)**

3. Soit $\mathbf{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{CK}}$. On pose : $\mathbf{r_2 = t \circ r_1}$.

a) Déterminer la nature de la composée $\mathbf{r_2 = t \circ r_1}$. Préciser $\mathbf{r_2(I)}$ et $\mathbf{r_2(B)}$. Caractériser $\mathbf{r_2}$. **(1)**

b) Déterminer une droite $\mathbf{\Delta}$ telle que $\mathbf{s_\Delta \circ r_2 = s_{(AJ)}}$. En déduire une autre décomposition de $\mathbf{r_2}$. **(0,25)**

4. On considère les similitudes directes $\mathbf{s_1}$ et $\mathbf{s_2}$ de centres respectifs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ telles que : $\mathbf{s_1(B) = K}$ et $\mathbf{s_2(K) = B}$.

a) Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes $\mathbf{s_1}$ et $\mathbf{s_2}$. **(1)**

b) Déterminer la nature de la composée $\mathbf{f = s_2 \circ s_1}$ et la caractériser. **(0,25)**

5. Dans cette question, $\mathbf{M}$ est un point variable du plan. On pose $\mathbf{r_1(M) = M_1}$ et $\mathbf{r_2(M) = M_2}$.

a) Démontrer que si $\mathbf{M}$ est distinct de $\mathbf{J}$ et de $\mathbf{\Omega}$ alors on a : $(\overrightarrow{\mathbf{M\Omega}}, \overrightarrow{\mathbf{MJ}}) = (\overrightarrow{\mathbf{MM_1}}, \overrightarrow{\mathbf{MM_2}}) \quad [2\pi]$. **(0,5)**

b) En déduire le lieu géométrique du point $\mathbf{M}$ lorsque les points $\mathbf{M}$, $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ sont alignés. **(0,25)**

c) Démontrer que pour toute position du point $\mathbf{M}$ dans le plan, la distance $\mathbf{M_1M_2}$ reste constante et la préciser et que la droite $\mathbf{(M_1M_2)}$ possède une direction fixe à préciser. **(0,5)**

Exercice 4 (7 points)

I- On considère la fonction numérique $\mathbf{g}$ définie par : $\mathbf{g(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}}$.

1. Vérifier que pour tout réel $\mathbf{x > -1}$ on a : $\mathbf{g(x) > 0}$. **(0,25)**

2. Déterminer les réels $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ tels que pour tout réel $\mathbf{x > -1}$ on a : $\mathbf{g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}}$. **(0,75)**

3. Déterminer la primitive $\mathbf{G}$ de la fonction $\mathbf{g}$ sur l'intervalle $\mathbf{I =]-1,+\infty[}$ et qui vérifie : $\mathbf{G(0) = 1}$. **(0,5)**

II- On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $\mathbf{I =]-1,+\infty[}$ par : $\mathbf{f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)}$. Soit $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ d'unité $\mathbf{1cm}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. **(1)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5)**

2.a) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $\mathbf{I =]-1,+\infty[}$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on déterminera. **(0,25)**

b) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x) = 0}$ admet une unique solution α. Vérifier que $\mathbf{-0,53 < \alpha < -0,52}$. **(0,5)**

3.a) Montrer que pour tout réel $\mathbf{x > 0}$ on a : $\mathbf{f(x) \geq x + 1}$. Interprétation graphique. **(0,25)**

b) Montrer que les courbes $\mathbf{(C)}$ et $\mathbf{(C')}$, représentant respectivement la fonction $\mathbf{f}$ et sa réciproque $\mathbf{f^{-1}}$ dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$, se coupent en un unique point dont l'abscisse β vérifie $\mathbf{-0,81 < \beta < -0,80}$. **(0,5)**

c) Démontrer que : $\mathbf{(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}}$. **(0,5)**

4.a) Déterminer tous les points de la courbe $\mathbf{(C)}$ en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $\mathbf{y = 2x}$. **(0,5)**

b) Discuter suivant les valeurs du paramètres réel $\mathbf{k}$ le nombre de solution de l'équation : $\mathbf{x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k}$. **(0,5)**

c) Construire les courbes $\mathbf{(C)}$ et $\mathbf{(C')}$. **(0,5)**

5. Soit $\mathbf{A}$ l'aire du domaine plan limité par les courbes $\mathbf{(C)}$ et $\mathbf{(C')}$ et les axes des coordonnées.

a) Montrer que : $\mathbf{A = \alpha^2 + \displaystyle\int_\beta^\alpha (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1))dx}$. **(0,25)**

b) Calculer $\mathbf{A}$ en fonction de α et β (On pourra utiliser une intégration par parties). **(0,25)**

Fin.