grandprof.net

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2011
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on pose : $\mathbf{P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1}$ où $\boldsymbol{\theta \in [0; 2\pi[}$.

1) Calculer $\mathbf{P(1)}$ puis déterminer les solutions $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$ de l'équation $\mathbf{P(z) = 0}$ sachant que $\mathbf{z_0}$ est réel, et $\mathbf{Im\,z_1 \geq 0}$ si $\boldsymbol{\sin\theta \geq 0}$. **(1,5)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ d'affixes respectives $\mathbf{z_0}$, $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$. Déterminer, lorsque $\boldsymbol{\theta}$ décrit l'intervalle $\boldsymbol{[0; 2\pi[}$, le lieu géométrique $\boldsymbol{\Gamma_1}$ des points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$. **(0,5)**

3) Soit le point $\mathbf{G}$ barycentre du système $\mathbf{S = \{(M_0, 1); (M_1, 1); (M_2, -3)\}}$

a) Démontrer que si $\boldsymbol{\theta}$ décrit l'intervalle $\boldsymbol{[0; 2\pi[}$, alors le lieu géométrique $\boldsymbol{\Gamma}$ du point $\mathbf{G}$ est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. **(0,5)**

b) Déterminer, dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, les coordonnées du centre et des sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse $\boldsymbol{\Gamma}$. Construire $\boldsymbol{\Gamma}$ dans ce repère. **(0,5)**

4) On suppose dans cette question que $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$.

a) Déterminer les coordonnées des points $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ et $\mathbf{G}$. Placer ces points sur la figure précédente. Quelle est la particularité de $\mathbf{G}$ dans ce cas ? **(0,5)**

b) Déterminer puis construire l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma'}$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que : **(0,5)**

$$\mathbf{MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6}$$

Exercice 2 (4 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie par : $\begin{cases} \mathbf{f(x) = x(1 - \ln x);} & \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{f(0) = 0} \end{cases}$

Soit $\mathbf{(C)}$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormal $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de $\mathbf{f}$ à droite de $\mathbf{x_0 = 0}$, interpréter graphiquement. **(0,75)**

b) Dresser le tableau de variations de $\mathbf{f}$. **(0,75)**

c) Calculer $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}$. Construire la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,25)**

2) Pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on pose : $\begin{cases} \mathbf{f_n(x) = x^n(1 - \ln x);} & \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{f_n(0) = 0} \end{cases}$

Soit $\mathbf{(C_n)}$ la courbe représentative de la fonction $\mathbf{f_n}$ dans le repère orthonormal $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$.

a) Pour $\mathbf{n \geq 2}$, étudier la dérivabilité de $\mathbf{f_n}$ à droite de $\mathbf{x_0 = 0}$. Interpréter graphiquement. **(0,25)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f_n}$. **(0,5)**

3.a) Montrer que toutes les courbes $\mathbf{(C_n)}$ passent par trois points communs que l'on déterminera. **(0,5)**

b) Etudier la position relative de $\mathbf{(C_n)}$ et $\mathbf{(C_{n+1})}$. **(0,25)**

4) Pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ on pose : $\displaystyle \mathbf{U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)dx}$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\mathbf{U_n}$. **(0,25)**

b) Justifier sans calcul, que la suite $\mathbf{(U_n)}$ est positive et décroissante. **(0,25)**

c) Donner l'expression de $\mathbf{U_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$ et calculer $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \mathbf{U_n}$. **(0,25)**

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement. **(0,75)**

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation. **(1)**

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$. **(0,25)**

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$. **(0,25)**

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=\ln 3$, et pour tout entier naturel $n\geq 1$: $\quad U_n=\int_0^{\ln 3}(f(t))^n dt$.

a) Calculer U_1. **(0,25)**

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leq U_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\ln 3$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,5)**

c) Vérifier que pour tout $x\geq 0$ on a : $1-f'(x)=\left(f(x)\right)^2$. Montrer que pour tout $n\geq 0$:

$$U_{n+2}-U_n=\frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$ **(0,75)**

d) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\begin{cases} U_{2n}=\ln 3-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1}=\ln\dfrac{5}{3}-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$ **(0,5)**

e) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on pose :

$$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots+\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. **(0,75)**

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a, $a>0$.
Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) **(0,75)**

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J. **(0,5)**

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. **(0,5)**

2) On considère la rotation r_2 de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(C), r_2(J)$. **(0,5)**

b) En déduire l'image de la droite (AC) par r_2 puis la construire. **(0,25)**

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $k=\dfrac{-1}{2}$. On pose $s=r_1\circ h$.

a) Quelle est l'image du triangle ABC par h ? **(0,25)**

b) Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle. **(0,5)**

c) Déterminer $s(A)$. Que peut-on conclure ? **(0,25)**

d) Donner la forme réduite de $\mathbf{s}$. **(0,25)**

4) On pose $\mathbf{s^1 = s}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{s^{n+1} = s \circ s^n}$.

a) Caractériser $\mathbf{s^3}$. **(0,25)**

b) Soit $\mathbf{p = 10^{2011}}$. Montrer que $\mathbf{s^{p-1}}$ est une homothétie de rapport négatif. **(0,75)**

5) Pour tout point $\mathbf{M}$ du plan, on pose : $\mathbf{r_1(M) = M_1}$, $\mathbf{r_2(M) = M_2}$ et $\mathbf{s(M) = M'}$.

a) Déterminer $\mathbf{M_1, M_2}$ dans chacune des positions suivantes de $\mathbf{M}$: $\mathbf{M}$ est en $\mathbf{I}$; en $\mathbf{K}$; ou en $\mathbf{A}$. **(0,75)**

b) Montrer que, pour tout $\mathbf{M}$ distinct de $\mathbf{A}$, le triangle $\mathbf{AMM'}$ est rectangle. **(0,25)**

c) Déterminer l'ensemble $\mathbf{\Gamma}$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que $\mathbf{M, M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ soient alignés. (On pourra considérer les triangles $\mathbf{IMM_2}$, $\mathbf{KMM_1}$ et l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{MK}};\overrightarrow{\mathbf{MI}})$). **(0,5)**

6) On suppose dans cette question que $\mathbf{M}$ est situé sur le cercle de diamètre $\mathbf{[AC]}$, $\mathbf{M}$ est distinct du point $\mathbf{A}$. Montrer que :

a) La droite $\mathbf{(M_1M_2)}$ passe par un point fixe que l'on déterminera. **(0,25)**

b) La droite $\mathbf{(MM')}$ passe par un point fixe que l'on déterminera. **(0,25)**

c) L'angle $(\overrightarrow{\mathbf{M_1M_2}}, \overrightarrow{\mathbf{MM'}})$ à une mesure constante α modulo π que l'on déterminera. **(0,25)**

Fin .