République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2012

Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

رمضان 1433 هـ

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z+2i)(z^2+az+b)$$ (0,75 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt)

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C. (0,5 pt)

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$. (0,5 pt)

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)

3. Pour tout point M du plan on pose : $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_{16}. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. (1 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

c) Construire la courbe (C). (0,5 pt)

2. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$U_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n).$$

a) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \dfrac{1}{n\ln n}$ (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$. En déduire le sens de variation de (U_n). (0,5 pt)

c) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n \geq f(n+1)-f(n)$. En déduire que $U_n \geq -\ln(\ln 2)$. (0,25 pt)

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln 2) \leq \ell \leq \dfrac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (6 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{e^x}}$.

On désigne par $(\mathbf{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j})$.

1\. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (1 pt)

b) Montrer que la courbe $(\mathbf{C})$ de $\mathbf{f}$ admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse $\mathbf{1}$. (1 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. (0,5 pt)

b) Construire la courbe $(\mathbf{C})$. (0,5 pt)

3\. Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n). (0,5 pt)

b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ? (0,5 pt)

c) Donner un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ .Calculer cette limite. (0,5 pt)

4.a) Calculer I_0. (0,5 pt)

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $\mathbf{n}$: $I_{n+1}=\dfrac{-1}{e}+(n+1)I_n$. (0,5 pt)

c) Calculer l'aire sous la courbe $(\mathbf{C})$ délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. (0,5 pt)

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $\mathbf{ABCD}$ de coté $\mathbf{a}$, $(a>0)$.
Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ les symétriques respectifs des points $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$ par rapport à $(\mathbf{AD})$. Soit $\mathbf{G}$ le point tel que le triangle $\mathbf{DBG}$ soit équilatéral direct. Soient $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ les milieux respectifs des segments $[\mathbf{DB}]$ et $[\mathbf{DF}]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (1 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme $\mathbf{D}$ en $\mathbf{G}$ et $\mathbf{F}$ en $\mathbf{B}$. Préciser l'angle et le centre de r_1. (1 pt)

c) Soit la rotation r_2 qui transforme $\mathbf{G}$ en $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Préciser l'angle et le centre de r_2. (0,5 pt)

d) On pose $r=r_2\circ r_1$. Déterminer $r(D)$ et $r(F)$. Caractériser $\mathbf{r}$. (0,75 pt)

2\. On considère l'homothétie $\mathbf{h}$ de centre $\mathbf{B}$ et de rapport $k=\dfrac{1}{2}$. On note $s=h\circ r$.

a) Montrer que $\mathbf{s}$ est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de $\mathbf{s}$. (0,75 pt)

b) Soit Ω le centre de $\mathbf{s}$. Montrer que Ω appartient à deux cercles Γ_1 et Γ_2 que l'on déterminera. (0,75 pt)

c) Déterminer deux réels α et β tels que Ω soit le barycentre du système $\{(E,\alpha);(I,\beta)\}$. Placer Ω sur la figure. (0,25 pt)

3\. On considère l'ensemble Γ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que $MA+ME=2a$ où $\mathbf{a}$ est la longueur du coté du carré $\mathbf{ABCD}$.

a) Montrer que Γ est une ellipse passant par $\mathbf{D}$. (0,5 pt)

b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de Γ et calculer son excentricité $\mathbf{e}$. (0,25 pt)

c) Déterminer $\Gamma'=s(\Gamma)$ puis construire Γ et Γ'. (0,25 pt)

Fin.