

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \quad (0,75 \text{ pt})$$

2.a) Dresser le tableau de variation de f . (0,75 pt)

b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) Tracer la courbe (C) . (0,25 pt)

3. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$. On se propose de calculer I par deux méthodes.

Méthode a : Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}. \quad \text{En déduire } I. \quad (0,5 \text{ pt})$$

Méthode b : En posant $t = e^x + 1$, utiliser une intégration par parties pour calculer I . (0,5 pt)

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; 1; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 1; 4)$, $D(5; 3; -2)$ et $E(6; -2; -4)$.

1.a) Calculer \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{DE} . Vérifier que le vecteur \overline{DE} est normal au plan (ABC) (1 pt)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) . (0, 25 pt)

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE) . (0, 5 pt)

d) Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

Déterminer un réel k tel que $\overline{EF} = k\overline{DF}$ (0,5 pt)

2.a) Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$. (On rappelle que $V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{Hauteur}$). (0,25 pt)

b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30 \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36. \quad (0,25 \text{ pt})$$

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans \mathbb{C} , on considère l'équation $E_\theta : z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0, \theta \in [0, 2\pi[$.

1.a) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation E_θ . On note z_1, z_2 les solutions de E_θ avec

$\text{Im}(z_1) \geq 0$ si $\theta \in [0, \pi[$ (1 pt)

- b) Préciser les valeurs de θ et les solutions de E_θ dans les cas suivants :
- L'équation E_θ admet des solutions doubles. Dans ce cas on note A_1 et A_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $\text{Re}(z_1) \geq 0$. (0,25 pt)
 - L'équation E_θ admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas on note B_1 et B_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $\text{Im}(z_1) \geq 0$. (0,25 pt)
2. Dans le cas général on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 .
- a) Déterminer le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\theta \in [0, 2\pi[$. (1 pt)
 - b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ et le construire. (0,5 pt)
3. On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' , barycentre du système $\{(A_1, -4); (B_1, 2); (M, 3)\}$.
- a) Ecrire z' en fonction de z puis reconnaître f et donner ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)
 - b) Donner une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$. Donner les éléments caractéristiques de Γ' dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (0,5 pt)

Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme

général $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de f . (1 pt)
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx$.
 - a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$. (0,5 pt)
 - b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$. (0,5 pt)
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
 - a) Montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; pour $1 \leq k \leq n-1$. (0,25 pt)
 - b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ puis que : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (0,5 pt)
 - c) En utilisant 3.b) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$. (0,25 pt)
- 4.a) Montrer que : $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. (0,5 pt)
- b) En déduire que : $S_n = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln U_n$. (0,25 pt)
- c) Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25 pt)

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a , ($a > 0$), de centre G . Soient I , J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Le point E est le symétrique de K par rapport à I .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en I et J en A . (0,5 pt)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de r_1 . (0,5 pt)

3. Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{AJ} . On pose : $r_2 = t \circ r_1$ et $f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE}$.

a) Déterminer $r_2(J)$ et caractériser r_2 . (0,5 pt)

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r_1 = s_{KC} \circ s_{\Delta_1}$ et $r_2 = s_{JC} \circ s_{\Delta_2}$. En déduire que $f = t_{AJ} \circ s_{KC}$ (0,5 pt)

c) Déterminer l'image du triangle BIK par f . Justifier que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme E en I et C en G . (0,5 pt)

b) Déterminer un angle et le rapport de s . (0,5 pt)

c) Montrer que le centre de s est situé sur les cercles circonscrits aux triangles BCG et BEI . Préciser ce centre. (0,25 pt)

5. Dans cette question, M est un point variable du cercle Γ de diamètre $[BC]$.

On note $s(M) = M'$.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ' du point M' lorsque M décrit Γ . (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout point M de Γ distinct de B , la droite (MM') passe par le point K . (0,25 pt)

c) En déduire un programme de construction de M' à partir d'une position de M sur Γ . Placer M et M' en supposant que les points B, M et C se succèdent dans le sens trigonométrique sur Γ . (0,25 pt)

6) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $s^2 = s \circ s$ et $s^n = s \circ s^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = E$; $M_1 = s(M_0)$ et $M_n = s^n(M_0)$.

a) Sur une nouvelle figure, placer les points B, M_0, M_1, M_2, M_3 (Pour la construction, on pourra prendre la droite (BE) verticalement avec $BE = 6\text{cm}$). (0,25 pt)

b) Calculer en fonction de n et a la somme : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$. (0,25 pt)

c) Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et l'interpréter. (0,25 pt)

d) Justifier que : $M_{1960} \in (BM_4)$ et $M_{2012} \in (BG)$. (0,25 pt)

Fin.