

Baccalauréat
2013
Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

رمضان 1434 هـ

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$.

Le paramètre n est un entier naturel.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$.

(0,75 pt)

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique U_0 et que $U_0 \in]-1, 0[$.

(0,5 pt)

c) Tracer C_0 .

(0,25 pt)

2.a) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe A que l'on déterminera.

(0,5 pt)

b) Etudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1} .

(0,5 pt)

3.a) Prouver que pour tout entier naturel, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution U_n et que $U_n \in]-1, 0[$.

(0,25 pt)

b) On considère la suite de terme général U_n .

Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

(0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Pour tout z de \mathbb{C} on pose: $P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-5+18i)z + 18 - 12i$

1.a) Calculer $P(2)$ et $P(3i)$.

(1 pt)

b) En déduire les nombres complexes z_1, z_2, z_3 solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$.

(1 pt)

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et le point G barycentre du système $\{(A, 1), (B, -3), (C, 4)\}$.

Pour tout point M du plan on pose :

$$\varphi_1(M) = MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2 \quad \text{et} \quad \varphi_2(M) = 4MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2$$

a) Vérifier que l'affixe du point G est $z_G = 5 + \frac{3}{2}i$.

(0,5 pt)

b) Donner une forme réduite de $\varphi_1(M)$ et de $\varphi_2(M)$.

(0,5 pt)

c) Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan tels que :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = -3$$

(0,5 pt)

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_2(M) = 44.$$

(0,5 pt)

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

- 1.a) Montrer que f est continue en 0^+ . (0,5 pt)
 b) Etudier la dérivabilité de f en zéro à droite et interpréter graphiquement. (0,5 pt)
 c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

- 2.a) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
 b) Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. (0,5 pt)
 c) Tracer la courbe de f . (0,25 pt)

3) On considère la fonction g définie par : $g(t) = tf(t)$.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x g(t)dt = \int_1^x tf(t)dt$.

- a) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$. Calculer $F'(x)$ et montrer que F est croissante. (0,5 pt)
 b) Vérifier que pour tout t de $[1, +\infty[$, on a : $g(t) \geq \frac{2 \ln t}{t}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,5 pt)
 c) Dresser le tableau de variation de F . (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un losange direct $ABCD$ de centre O et de côté a ($a > 0$).

tel que $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. On considère les deux points E et F tels que $OEFD$ soit un carré direct.

- 1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complètera au fur et à mesure (On pourra prendre (AC) horizontale). (0,5 pt)
 2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et D en A . (0,5 pt)
 b) Préciser un angle et le centre de cette rotation. (0,5 pt)
 3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en D et D en F . (0,5 pt)
 b) Déterminer le rapport et un angle de s . (0,5 pt)
 c) Soit H le projeté orthogonal de D sur (BF) . Déterminer les images des droites (BH) et (DH) par s . En déduire que H est le centre de s . (0,5 pt)
 d) Préciser et placer sur la figure les images des sommets du carré $OEFD$ par la similitude s . (0,5 pt)
 4) On muni le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{OE}, \vec{OD})$. (0,75 pt)
 a) Déterminer les coordonnées des points $E; D; B$ et F dans ce repère. (0,25 pt)
 b) Donner l'expression complexe de la similitude s . (0,25 pt)
 c) En utilisant 3.a) retrouver le rapport et l'angle de s , et calculer les coordonnées de H dans le repère précédent. (0,5 pt)

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$ et $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$. (0,5 pt)
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)
 2.a) Dresser le tableau de variation de f . (0,25 pt)

- b) Tracer C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0, 25 pt)
- c) Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer en fonction de a , l'aire du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln a$. (0, 25 pt)
- 3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\ln a} (f(t))^n dt$
- a) Vérifier que $I_1 = 2 \ln \left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}} \right)$. (0, 25 pt)
- b) Vérifier que pour tout réel x : $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$. En déduire la valeur de I_2 . (0,5 pt)
- c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n \ln a$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)
- d) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $I_n - I_{n+2} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{n+1}$. (0,25 pt)
- 4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^k$.
- a) Ecrire $S_n(a)$ en fonction de certains termes de la suite (I_n) . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a)$. (0,5 pt)
- b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :
- $$T_n = \frac{9}{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{11} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{11} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{9}{11} \right)^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{9}{11} \right)^k$$
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. (0,25 pt)

Fin.