

Baccalauréat
2014
Session Complémentaire
رمضان 1435

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) : $11x+9y=19$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Vérifier que $(-4,7)$ est une solution particulière de (E). (0,5 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (1 pt)

2) Uniquement , pour la série C

Une variable aléatoire réelle X ne prend que trois valeurs : $-4, 7$ et 8 , avec les probabilités respectives:

$$P_1 = \frac{x-4}{9}, P_2 = \frac{2x-y-8}{9}, P_3 = \frac{8x+10y+2}{9}.$$

a) Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers (x, y) tel que ces coordonnées soient acceptables. Préciser le. (0,75 pt)

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = 6$. (0,5 pt)

c) Calculer la variance de X . (0,25 pt)

2.bis) Uniquement , pour la série TMGM

On considère l'équation (E') : $(11-9i)z+(11+9i)\bar{z}=38$, d'inconnue complexe. \bar{z} désigne le conjugué de z .

a) Soit $M(x,y)$ un point d'affixe z où z est une solution de (E'). Montrer que l'équation (E') admet une infinité de solutions et déterminer le lieu géométrique Δ des points $M(x,y)$. (0,75 pt)

b) Quels sont les points $M(x,y)$ de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? (0,75 pt)

Exercice 2 (4 points)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , on pose: $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (-2-8i)z - 8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$. (0,75 pt)

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1 pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation

$$f \text{ d'expression : } z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i.$$

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f . (0,75 pt)

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de $B(-3,-1)$ par f . Placer les points A, B et C sur la figure et montrer que le triangle ABC est rectangle. (0,75 pt)

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S = \{(A,-4); (B,1); (C,6)\}$. Vérifier que les points A, B, C et G sont cocycliques. (0,25 pt)

3) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -4MA^2 + MB^2 + 6MC^2 = 30$ (0,25 pt)

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = 16$. (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - \ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g . (0,5 pt)

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution α . Vérifier que

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1. \text{ En déduire le signe de } g(x).$$
 (0,75 pt)

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Interpréter graphiquement. (0,25 pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (1 - x))$. Interpréter graphiquement. (0,25 pt)

c) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f . (0,75 pt)

d) Construire la courbe représentative de f . (0,25 pt)

3) Soit f_m la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f_m(x) = -x + 1 + \frac{m^2}{x}(1 + \ln x - \ln m)$, où m est un paramètre réel strictement positif.

a) Montrer que les courbes (C_m) représentatives des fonctions f_m dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont on précisera le point d'intersection, noté G . (0, 5 pt)

b) Montrer que (C_m) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre G dont on précisera le rapport. (0, 5 pt)

c) Dédurre le tableau de variation de f_m à partir de celui de f . (0, 25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté a , ($a > 0$).

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) (0,75 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A . (0,5 pt)

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. (0,5 pt)

d) On considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r_1 \circ r_2(B)$ et caractériser $r_1 \circ r_2$. (0,5 pt)

2) On considère les points D et E symétriques respectifs de I et J par rapport à K .

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en K et J en E . (0,5 pt)

b) Justifier que g est une symétrie glissante. Déterminer $g(D)$ et donner la forme réduite de g . (0,5 pt)

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et C en J . (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s_1 . Justifier que O est le centre de s_1 . (0,5 pt)

5) On considère les points $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$, tels que $BM = CN = AP = x$, $x \in [0, a]$.

a) Montrer que le triangle MNP est équilatéral et de centre O . (0,25 pt)

b) Soit H le milieu de $[MN]$. Déterminer le lieu géométrique de H lorsque M décrit $[BC]$. (0,25 pt)

c) A partir d'une position donnée de M sur $[BC]$, montrer qu'il existe une unique similitude directe s_2 qui transforme (A, B, C) en (P, M, N) . Préciser son centre. (0,25 pt)

d) Préciser la position de M sur $[BC]$ pour laquelle, le quotient $\lambda = \frac{OM}{OB}$ est minimal. En déduire la position de M sur $[BC]$ pour laquelle l'aire du triangle MNP est minimale. (0,25 pt)

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$.

Soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)
- c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ , (On remarquera que le domaine de définition de f est \mathbb{R}). (0,75 pt)
- 2) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
 Montrer que $1 \leq A \leq \frac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A . (0,25 pt)
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$; et $I_0 = 1$
- a) Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$, (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,5 pt)
- b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)
- 4) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$.
- a) Justifier que : $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$. (0,25 pt)
- b) Montrer que : $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$. (0,25 pt)
- c) Montrer que : $0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = A$. (0,25 pt)
- d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près. (0,25 pt)

Fin.