

Baccalauréat
2014
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$.

1) Calculer $P(2i)$ et déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $\text{Im} z_0 \geq \text{Im} z_1 \geq \text{Im} z_2$. (1,5 pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 . On pose $z' = f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$. On note M et M' les points d'affixes respectives z et z' . (0, 5 pt)

a) Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $2x + 1 = 0$

b) Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses

(On pourra remarquer que $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$). (0,25 pt)

3.a) Démontrer que si $|z| = 1$, alors $f(z) = \frac{\bar{z}}{1 + z + z}$. (0,25 pt)

b) Vérifier que si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors $f(z) = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$. (0,25 pt)

4.a) Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de A et C, alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = (2x - 1)^2$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (0,5 pt)

b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de Γ . Construire Γ dans le repère précédent. (0,75 pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (1,5 pt)

1. a) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

b) Tracer la courbe (C). (0,5 pt)

c) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (0,5 pt)

d) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2) On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$. (0,5 pt)

a) Montrer que $I_1 = -1$ (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)I_n.$$

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1} dx$. Donner la valeur de J sous la forme $ae + b$ où a et b sont des entiers relatifs. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue à droite de zéro (On pourra écrire $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x$). (0,5 pt)

b) Étudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (On pourra poser $t = \frac{1}{x}$). Interpréter graphiquement. (0, 5 pt)
- 2.a) Vérifier que $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$. (0, 5 pt)
- b) Dresser le tableau de variation de f . (0, 5 pt)
- c) Construire la courbe de f . (0, 5 pt)
- 3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on pose:
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$
 et $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n) . (0,25 pt)
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1). (0,25 pt)
- c) Justifier que $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. (0,5 pt)
- 4) On pose $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x dx$, $I_n = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_n(\alpha)$ et $J_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α et de n . (0, 5 pt)
- b) Montrer que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$. (0,25 pt)
- c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $J_{n+1} = \frac{2 \ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$. (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points) (Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment).

Partie A

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a , ($a > 0$). Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

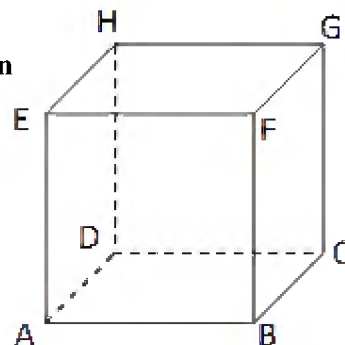
- 1) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)
- 2) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r . (1 pt)
- 3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1 . (0,75 pt)
- b) Soit P le centre de la similitude f_1 . Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK). (0,5 pt)
- 4.a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport. (0,5 pt)
- b) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1 . (0,5 pt)
- 5.a) Soit $h = f_1 \circ f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P = \text{bar}\{(B, \beta); (L, \gamma)\}$. (0,5 pt)
- b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P = \text{bar}\{(A, \alpha); (K, \lambda)\}$. (0,25 pt)

Partie B

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carré précédent un cube ABCDEFGH. On note : s_1 la réflexion de plan (ABCD) ; s_2 la réflexion de plan (AEHD) ; s_3 la réflexion de plan (ABFE) et s_4 la réflexion de plan (DCGH). Soit $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4$, $r = s_1 \circ s_2$ et $t = s_3 \circ s_4$.

On ne demande pas de reproduire la figure.

- 1) Montrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe.
- 2) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.
- 3) Reconnaître et caractériser f .



Fin.