République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2015
Session Normale

Série : C &t TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients:9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-3)(z^2+az+b).$$ (0,5 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (1 pt)

c) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\text{Im}(z_A)<\text{Im}(z_B)<\text{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G. (0,5 pt)

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur. (0,5 pt)

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k. (0,5 pt)

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Reconnaître Ω_1. (0,5 pt)

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C. (0,5pt)

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_m pour $m=10$. (0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct $ABCD$ de longueur AD tel que AB=a et AD=2a, $(a>0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle $ABCD$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D. Préciser le centre et un angle de r. (0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en C et A en K. (0,25 pt)

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g=t_{\overrightarrow{IC}}\circ s_{AB}$. (0,5 pt)

c)Déterminer une droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{BC}}=s_\Delta\circ s_{AB}$. En déduire la forme réduite de g, (on pourra remarquer que $t_{\overrightarrow{IC}}=t_{\overrightarrow{IB}}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$). (0,25 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(J)=B$. (0,5 pt)

b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1)=\Gamma_2$ (0,25 pt)

4) On désigne par P le centre de s.

a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P. (0,25 pt)

b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC). (0,25 pt)

c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE). (0,25 pt)

5.a) Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que $s(L)=R$. (0,25 pt)

b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. On note $s(M')=M''$. Montrer que :

i) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera. (0,25 pt)

ii) Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle. (0,25pt)

6) Soit Γ la parabole de foyer L et de directrice (BC).

a) Montrer que Γ passe par A, O et D. (0,25 pt)

b) Préciser la tangente à Γ en A et tracer Γ. (0,25 pt)

c) Déterminer et construire le foyer et la directrice de $\Gamma'=s(\Gamma)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement. (0,75 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C). (0,25 pt)

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4<\alpha<0,5$. (0,5 pt)

c) Tracer les courbes (C) et (C'). (0,5 pt)

d) Calculer, en fonction de α, l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$). (0,25 pt)

3) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^\alpha f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1=\alpha+\ln(2\alpha)$. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x)=f^2(x)-f(x)$. (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}-I_n=\dfrac{1}{n}\left(\alpha^n-\dfrac{1}{2^n}\right)$. (0,5 pt)

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,25 pt)

4.a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1}\leq I_n\leq\dfrac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$. (0,25 pt)

b) Montrer que $I_n=\alpha+\ln(2\alpha)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\left(\alpha^k-\dfrac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\left(\alpha^k-\dfrac{1}{2^k}\right)$. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

1) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$. (0,5 pt)

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)

2) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=3x-3+\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,5 pt)

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D. (0,5 pt)

3.a) Vérifier que $f'(x)=g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}. (0,5pt)

c) Construire (C). (0,5 pt)

4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=3x-3$, $x=3$ et $x=2+\sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$. (0,25 pt)

b) Calculer $A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx$. (0,25 pt)

c) En posant $x=2+\tan t$ pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}dx$. (0,25 pt)

d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J=\int_2^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)dx$ et $K=2\int_2^{2+\sqrt{3}}\ln x\,dx$. En Déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire. (0,25 pt)

Fin.