

Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle. Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale. Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale. Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale. On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les événements suivants :
A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite » ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale ».
Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x) = \frac{1}{20}$	$f(x) = \frac{1}{40}$	$f(x) = \frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 3i)z - 4i$.

- 1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$ 0,5pt
- b) Calculer $P(i)$ 0,5pt
- c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
- d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt
- 2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$.
- a) Placer les points A, B et C. 0,5pt
- b) Déterminer la nature du triangle ABC. 0,25pt
- c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. 0,25pt
- d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$. 0,5pt
- 3° Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_C)^n$ et $v_n = |z_n|$.
- a) Vérifier que $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n . 0,5pt
- b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. 0,5pt
- c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ 0,5pt

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0,5pt

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. 0,5pt

c) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative entre (C) et D . 0,5pt

2° a) Calculer la dérivée f' puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de f est $f''(x) = (2x - 4)e^{-x}$ 0,5pt

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées. 0,25pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire que f' est positive. 0,5pt

d) Dresser le tableau de variation de f . 0,5pt

3° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $0.2 < \alpha < 0.3$ 0,5pt

b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à l'asymptote D . Donner une équation de T . 0,5pt

c) Tracer D , T et (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0,5pt

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$ 0,25pt

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+x+x \ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement. (0,75pt)

b) Vérifier que $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x$ (0,5pt)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement (0,5pt)

2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (1pt)

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$ (0,5pt)

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 2]$

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} , où g^{-1} est la fonction réciproque de g . (0,5pt)

c) Calculer $(g^{-1})'(3)$ (on pourra utiliser 2° b)) (0,25pt)

d) Construire (C) , (C') et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où (C') est la courbe de g^{-1} . (0,5pt)

4° On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de h . (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , telle que $2 < \alpha < 3$. Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et en déduire que $\forall x \geq \alpha$ on a $f(x) - x \leq 0$ (0,5pt)

5° Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que $u_n \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. (0,25pt)

b) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que (u_n) est convergente. (0,25pt)

6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^e \ln x dx$. (0,25pt)

b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,25pt)

Fin