

∞ Terminale S Polynésie 7 juin 2013 ∞

Exercice 1 :

6 points

Commun à tous les candidats

1. (a) • Les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; f(0))$ soit $(0; 2)$.
 • Les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 On applique la règle du produit nul en sachant que $e^{-x} \neq 0$:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
 Le point d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2; 0)$.

- (b) **Remarque :** la fonction $(x \mapsto e^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle

ou bien comme un quotient $\left(e^{-x} = \frac{1}{e^x} \right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée

« $+\infty \times 0$ » car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Mais, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ théorème de croissance comparée} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

- (c) f est dérivable sur \mathbb{R} car composée et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$	$-\infty$	e	0

2. (a) 1,642

(b)	Variables :	k est un nombre entier
		N est un nombre entier
		S est un nombre réel
	Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
	Traitement :	Pour k variant de 0 à $N-1$
		Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$
		Fin Pour
	Sortie :	Afficher S

3. (a) Sur $[0 ; 1]$, f est continue et positive, donc l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire, est donnée par $\mathcal{A} = \int_0^1 f(t) dt$. Comme g est une primitive de f sur \mathbb{R} , on a donc :

$$\mathcal{A} = [g(t)]_0^1 = g(1) - g(0) = -4e^{-1} + 3 = 3 - \frac{4}{e}.$$

(b) avec la calculatrice, $3 - \frac{4}{e} - 1,642 \approx 0,113$

Exercice 2 :

4 points

Commun à tous les candidats

d - c - a - b

1. (d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$:

$$\left| i \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|i| \times |z_1|}{|z_2|} = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$\arg\left(i \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(i) + \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}.$$

2. (c) **une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.**

Pour s'en convaincre, écrire les formes algébriques...

$$-z = \bar{z} \Leftrightarrow -a - ib = a - ib \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0$$

$$3. (a) \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}(-2 ; 3 ; 1)$ ce qui exclut la proposition (b).

De plus, C est le point de paramètre 0 dans la première représentation.

4. (b) **La droite Δ est parallèle au plan \mathcal{P} et n'a pas de point commun avec le plan \mathcal{P} .**

La droite Δ est dirigée par $\vec{u}(1 ; 1 ; 2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 - 5 + 2 = 0$. Donc Δ est parallèle à \mathcal{P} : ne restent que (b) et (d).

On teste si un point de la droite est dans le plan : pour $t = 0$, on a $A(-7 ; 3 ; 5) \in \Delta$.

Ensuite, $A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ et \vec{n} orthogonaux.

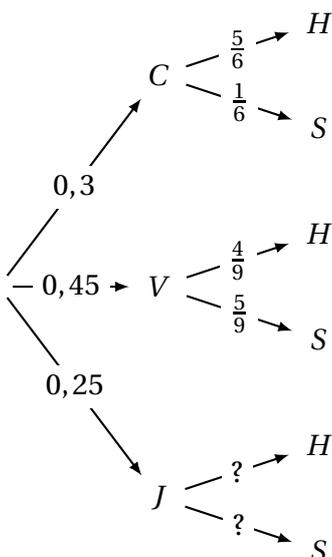
Or, $\overrightarrow{AD}(6; -1; -2)$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 18 + 5 - 2 \neq 0$. Donc $A \notin \mathcal{P}$

Exercice 3 :

5 points

Commun à tous les candidats

Partie 1



1. On veut $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,3 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$.

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

(a) Nous venons de calculer $P(C \cap H) = 0,25$ et

$$P(C) \times P(H) = 0,3 \times \frac{13}{20} = \frac{39}{200} \neq P(C \cap H)$$

Les évènements C et H ne sont pas indépendants.

(b) d'après l'arbre, $P(H) = P(H \cap C) + P(H \cap V) + P(H \cap J)$.

$$\text{On a donc } P(J \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - 0,45 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{5}$$

$$\text{et } P_J(H) = \frac{P(J \cap H)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

Partie 2

1. On répète 60 fois, de façon indépendantes, l'expérience « choisir un morceau de musique » qui compte 2 issues :

- « le morceau choisi est un morceau de musique classique » considéré comme succès, de probabilité 0,3

— ou pas...

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 60 et 0,3.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60 est donc donné par :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,3 - 1,96 \frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}} ; 0,3 + 1,96 \frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}} \right] \\ &= [0,184 ; 0,416] \end{aligned}$$

2. La fréquence observée par Thomas est $\frac{12}{60} = 0,2$ est dans l'intervalle précédent. Donc NON, il n'y a pas de raison de penser que le baladeur est défectueux.

Partie 3

1. $P(180 \leq X \leq 220) = P(X \leq 220) - P(X \leq 180) \approx 0,841 - 0,159$. Réponse : 0,682.
2. On veut $P(X > 4 \times 60) = 1 - P(X \leq 240) \approx 1 - 0,977$. Réponse : 0,023.

Exercice 4 :

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

1. (a) $u_1 = \frac{3 \times u_0}{1 + 2u_0} = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$
 et $u_2 = \frac{3 \times u_1}{1 + 2u_1} = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \frac{9}{10}$.

(b) — Pour tout entier naturel n , notons \mathcal{P}_n la propriété : $0 < u_n$.

— Initialisation : Si $n = 0$

Alors $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

— Hérité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que \mathcal{P}_k soit vraie (c-à-d. $0 < u_k$). Montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vraie aussi (c-à-d. $0 < u_{k+1}$).

Par hypothèse de récurrence $0 < u_k$ donc $0 < 3u_k$ et $0 < 1 + 2u_k$. ainsi, u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{k+1}$ et \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

— \mathcal{P}_0 est vraie et \mathcal{P}_n est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$.

2. (a) Comme pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

Mais, $u_n < 1 \Leftrightarrow 2u_n < 2 \Leftrightarrow 1+2u_n < 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{3}{1+2u_n}$ car $1+2u_n > 0$.

Finalement la suite (u_n) est croissante.

- (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers $\ell \leq 1$.

3. (a) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

- (b) Pour tout entier naturel $n, v_n = v_0 q^n = 3^n$.

- (c) Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

- (d) Comme $3 > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 4 :

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

1. (a) $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$$\text{Or } \begin{cases} a_1 = 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ b_1 = 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{cases} .$$

Finalemment $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

(b) Pour tout entier naturel n ,

$$M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$(I - M) = \begin{pmatrix} 1 - 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 1 - 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} .$$

Puis

$$(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0,3 - 0,2 & 2 \times 0,3 - 3 \times 0,2 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 & -0,1 \times 2 + 3 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

(b) On calcule $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times (I - M) = I$. Donc $I - M$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $U = M \times U + P \Leftrightarrow U - M \times U = P \Leftrightarrow (I - M) \times U = P \Leftrightarrow U = (I - M)^{-1} P$

Finalemment $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$.

3. (a) Pour tout entier naturel n ,

$$V_{n+1} = U_{n+1} - U = MU_n + P - (MU + P) = M(U_n - U) = M \times V_n .$$

(b) Par récurrence :

— Pour tout entier naturel n , notons \mathcal{P}_n la propriété : $V_n = M^n \times V_0$.

— Initialisation : Si $n = 0$ alors

$$M^0 = I \text{ et } V_0 = M^0 V_0 . \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

— Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que \mathcal{P}_k soit vraie (c.-à-d. $V_k = M^k \times V_0$). Montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vraie aussi (c.-à-d. $V_{k+1} = M^{k+1} \times V_0$).

$$V_{k+1} = MV_k = M \times (M^k \times V_0) = M^{k+1} \times V_0 \text{ et } \mathcal{P}_{k+1} \text{ est vraie.}$$

— \mathcal{P}_0 est vraie et \mathcal{P}_n est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

(a) Pour tout entier naturel n ,

$$V_n = U_n - U \Leftrightarrow U_n = V_n + U \Leftrightarrow U_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit donc } a_n = \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380$$

$$\text{Si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 380$$

(b) Le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme est donc de 380 000.