Baccalauréat S Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \text{i}$ et $b = 1 + \text{i}$.
On note : r_{A} la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_{B} la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_{O} la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3\text{i}$. On appelle D l'image de C par r_{A}, G l'image de D par r_{B} et H l'image de C par r_{O}.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + \text{i}$.

2. Déterminer g et h.

3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_{A}, P l'image de N par r_{B} et Q l'image de M par r_{O}.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = \text{i}m + 1 + \text{i}$. On admettra que $p = -m + 1 + \text{i}$ et $q = -\text{i}m$.

2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

3. **a.** Montrer l'égalité : $\dfrac{m-n}{p-n} = \text{i} + \dfrac{1}{m}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.
Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overrightarrow{M\text{A}} + b\overrightarrow{M\text{B}} + c\overrightarrow{M\text{C}}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).

2. Déterminer une équation du plan (BCE).

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

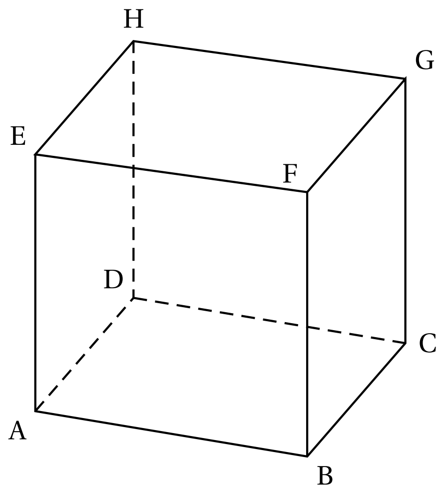
4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.

5. **a.** Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2.

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$.

c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.



EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
   b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
   c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;1]$.
3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0\,;1]$.
   b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4