MATHÉMATIQUES – CORRIGÉ N° I

(Voir Sujet-Type P. 147)

Exercice 1 :

I. 1 - a) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n - 3$.

$U_{n+1} = 1 - 3(n+1) = 1 - 3n - 3 = (1 - 3n) - 3 = U_n - 3$

donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+1} = U_n - 3}$

b) Nature et éléments caractéristiques de la suite (U_n) :

Comme $U_{n+1} = U_n - 3$ alors (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $U_0 = 1 - 3(0) = 1$.

2 - Expression de S_n en fonction de n :

$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et (U_n) est une suite arithmétique, alors

$$S_n = \frac{(n-0+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{(n+1)(1+1-3n)}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{(n+1)(2-3n)}{2}}$$

II. 1 - Montrons que (V_n) est une suite géométrique :

$V_n = e^{1-3n} = e^{U_n}$

donc $V_{n+1} = e^{U_{n+1}} = e^{U_n - 3} = e^{U_n} \times e^{-3} = e^{-3} \times V_n$

donc $\boxed{(V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = e^{-3} \text{ et de premier terme } V_0 = e.}$

2 - Sens de variation de (V_n) :

Comme $V_0 = e > 0$ et la raison de (V_n) est $q = e^{-3}$ avec $0 < e^{-3} < 1$.

alors $\boxed{(V_n) \text{ est une suite géométrique décroissante}}$

3 - Limite de la suite (V_n) :

Comme la raison de la suite géométrique (V_n) est entre – 1 et 1, alors

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 0}$

<u>Remarque</u> : On peut calculer cette limite directement sachant que

$\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 3n) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1-3n} = 0$

<u>Exercice 2</u> :

1 - <u>Nombre de cas possibles</u> :

Card $\Omega = 10^4 = 10\,000$.

2 - • <u>Calcul de p(A)</u> :

A : « $\frac{4}{2}$ noires » ou « $\frac{4}{3}$ rouges » ou « $\frac{4}{1}$ jaunes »

$$p(A) = \frac{2^4 + 3^4 + 4^4 + 1^4}{10\,000} = \frac{354}{10\,000} \quad \boxed{\frac{177}{5000}}$$

• <u>Calcul de p(B)</u> :

B : « $\frac{1}{2}$ noire » et « $\frac{1}{3}$ blanche » et « $\frac{1}{4}$ rouge » et « $\frac{1}{1}$ jaune »

$$p(B) = \frac{2^1 + 3^1 + 4^1 + 1^1}{2} \times \frac{4\,!}{1\,!1\,!1\,!1\,!} \quad \boxed{\frac{36}{625}}$$

• <u>Calcul de p(C)</u> :

C : « $\frac{2}{4}$ rouges et $\frac{2}{6}$ non rouges »

$$p(C) = \frac{4^2 \times 6^2}{10\,000} = \frac{4\,!}{2\,!2\,!} \quad \boxed{\frac{216}{625}}$$

• <u>Calcul de p(D)</u> :

D : « $\frac{1}{3}$ blanche, $\frac{2}{2}$ noires et $\frac{1}{4}$ rouge dans cet ordre »

$$p(D) = \frac{3^1 \times 2^2 \times 4^1}{10\,000} = \boxed{\frac{3}{625}}$$

• <u>Calcul de p(E)</u> :

E : « $\frac{1}{4}$ rouge et $\frac{3}{6}$ non rouge » ou $\frac{4}{6}$ non rouge »

$$p(E) = \frac{4^1 \times 6^3 \times \frac{4!}{1!3!} + 6^4}{10\,000} = \boxed{\frac{297}{625}}$$

Problème :

1 - a) Calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+}(1 - 2\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - 2\ln x}{x} = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

Interprétation graphique :

La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale pour (C).

b) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a: $f(x) = \dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Interprétation graphique : La droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale pour (C) au voisinage de $+\infty$.

2 - a) Montrons que, pour tout x > 0 , $f'(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^2}$

Posons $U = 1 - 2\ln x$ et $V = x$

$U' = -\dfrac{2}{x}$ et $V' = 1$

On a : $f'(x) = \dfrac{\frac{-2}{x}.x - (1 - 2\ln x)}{x^2} = \dfrac{-2 - 1 + 2\ln x}{x^2}$.

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^2}}$

b) Tableau de variation de f :

$x^2 > 0$, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-3 + 2\ln x)$.

$-3 + 2\ln x > 0$ si $2\ln x > 3$

$$\ln x > \frac{3}{2}$$

$$x > e^{\frac{3}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - 2\ln x(e^{\frac{3}{2}})}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{e^{\frac{3}{2}}} \quad -2e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	+	
f	$+\infty$	↘	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	↗	0

3 - Montrons que (C) coupe l'axe des abscisses en un point A :

(C) coupe l'axe des abscisses au point A $(x_A\,;\,0)$ équivaut à $f(x_A) = 0$.

d'où $\dfrac{1 - 2\ln x_A}{x_A} = 0$, donc $\ln X_A = \dfrac{1}{2}$, $X_A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$\boxed{A\,(\sqrt{e}\,;\,0)}$

4 - Equation de (T) :

Une équation de (T) est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ or $f(1) = 1$ et $f'(1) = -3$

d'où $\boxed{\text{(T) est définie par son équation } y = -3x + 4}$

5 - Traçage :

6 - a) Calcul c

On sait qu

Primitive F

On a : f(x) =

b) Calcul c

On a : A =

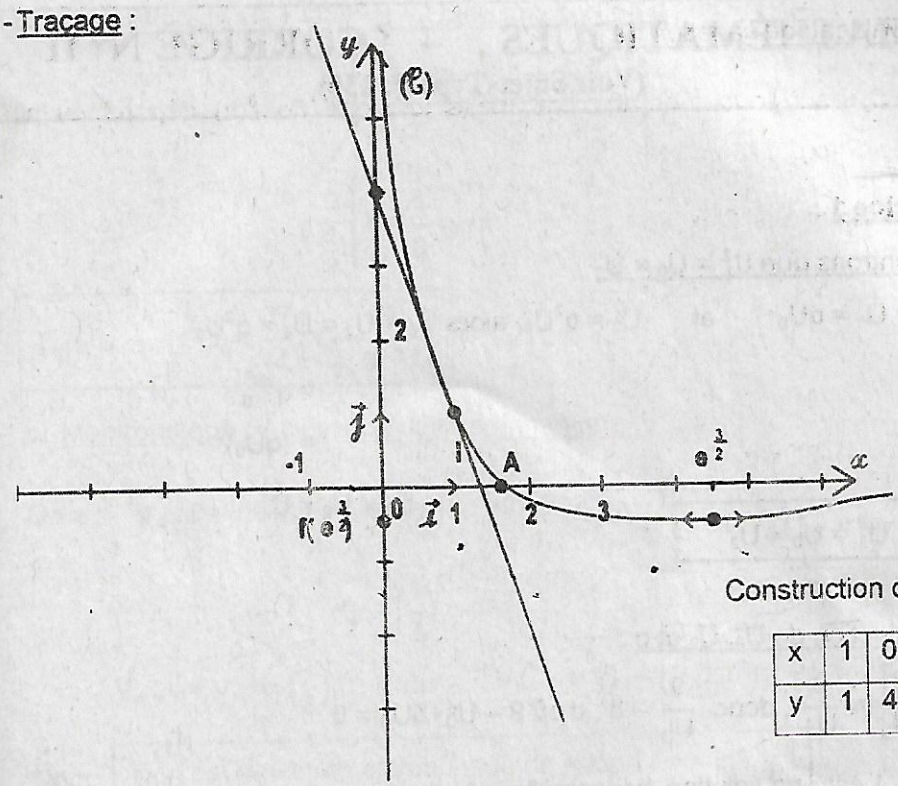
F(e) = lne

$F(\sqrt{e}) = \ln$

$A = \left|0 - \frac{1}{4}\right|$

$A = \frac{1}{4}$ cm²=

5 - Traçage :



Construction de (T)

x	1	0
y	1	4

6 - a) Calcul de g'(x) :

On sait que $(U^2)' = 2U \times U'$ alors $[(\ln x)^2]' = 2(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

Primitive F de f :

On a : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}$ alors $\boxed{F(x) = \ln x - (\ln x)^2}$

b) Calcul de A :

On a : $A = |F(e) - F(\sqrt{e})| \times u.a$

$F(e) = \ln e - (\ln e)^2 = 0$

$F(\sqrt{e}) = \ln\sqrt{e} - (\ln\sqrt{e})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$A = \left|0 - \frac{1}{4}\right| \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

$\boxed{A = \frac{1}{4}\text{ cm}^2 = 0{,}25\text{ cm}^2}$