CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

1- Un tirage possible est un arrangement de 3 jetons pris parmi dix jetons.
Donc le nombre de tirages possibles est :

$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

2- Calculs de probabilités

- A : « le produit des numéros des jetons tirés est nul » signifie « tirer 1 jeton numéroté 0 parmi 1 et 2 jetons non numérotés 0 parmi 9 » pris dans le désordre.

$$P(A) = 3 \cdot \frac{A_1^1\ A_9^2}{A_{10}^3} = 3 \cdot \frac{1 \cdot 9 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10}$$

- B : « les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression géométrique de raison 2 » signifie « tirer les jetons portant les numéros : 1 – 2 – 4 ou 2 – 4 – 8 » pris dans ces ordres.

$$P(B) = \frac{A_1^1\ A_1^1\ A_1^1 + A_1^1\ A_1^1\ A_1^1}{A_{10}^3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1\ +\ 1 \cdot 1 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{360}$$

- C : « les jetons tirés sont tricolores » signifie « tirer 1 jeton blanc parmi 3 et 1 jeton noir parmi 3 et 1 jeton rouge parmi 4 » pris dans le désordre.

$$P(C) = \frac{3!A_3^1\ A_3^1\ A_4^1}{A_{10}^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10}$$

- D : « le jeton rouge n'apparait qu'au troisième tirage » signifie « tirer 2 jetons non rouges parmi 6 et 1 jeton rouge parmi 4 » pris dans cet ordre.

$$P(D) = \frac{A_6^2\ A_4^1}{A_{10}^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

Arithmétique

1- a) Pour p entier naturel, déterminons les restes de la division de 5^p par 13 .

- Pour $p = 0$ on a : $5^0 \equiv 1 \quad (13)$; le reste est 1.
- Pour $p = 1$ on a : $5^1 \equiv 5 \quad (13)$; le reste est 5.
- Pour $p = 2$ on a : $5^2 \equiv 12 \quad (13)$; le reste est 12.
- Pour $p = 3$ on a : $5^3 \equiv 8 \quad (13)$; le reste est 8.
- Pour $p = 4$ on a : $5^4 \equiv 1 \quad (13)$; le reste est 1.

Donc

- Pour $p = 4k$, le reste est 1.
- Pour $p = 4k+1$, le reste est 5.
- Pour $p = 4k+2$, le reste est 12.
- Pour $p = 4k+3$, le reste est 8.

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrons que le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

$31 = 2 \times 13 + 5 \equiv 5 \quad (13)$

$18 = 1 \times 13 + 5 \equiv 5 \quad (13)$

donc $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5^{4n+1} + 5^{4n-1} \quad (13)$.

On sait que $5^{4n+1} \equiv 5 \quad (13)$ et $5^4 \equiv 1 \quad (13)$.

De $5^4 \equiv 1 \quad (13)$ on déduit $5^{4n+3} \equiv 5^{4n-1} \quad (13)$, et donc $5^{4n-1} \equiv 8 \quad (13)$ d'après la question précédente.

D'où $N = 5^{4n+1} + 5^{4n-1} \equiv 5 + 8 \quad (13)$

c'est-à-dire $N \equiv 0 \quad (13)$.

Le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est donc divisible par 13.

2- Soit dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$, l'équation (E) : $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$.

a) Remarquons que dans $\mathbb{Z}/_{13\mathbb{Z}}$, on a $\overline{14} = \overline{1}$. Ainsi

$x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ équivaut à $x^2 + \overline{14}x + \overline{7} = \overline{0}$

équivaut à $\left(x + \overline{7}\right)^2 - \overline{42} = \overline{0}$

équivaut à $\left(x + \overline{7}\right)^2 - \overline{3} = \overline{0}$

Or $4^2 \equiv 3 \quad (13)$ ou encore $\overline{3} = \overline{4}^2$ donc l'équation (E) est équivalente à $\left(x + \overline{7}\right)^2 - \overline{4}^2 = \overline{0}$.

b) L'équation E est équivalente à

$\left(x + \overline{7} + \overline{4}\right)\left(x + \overline{7} - \overline{4}\right) = \overline{0}$

$x + \overline{11} = \overline{0}$ ou $x + \overline{3} = \overline{0}$

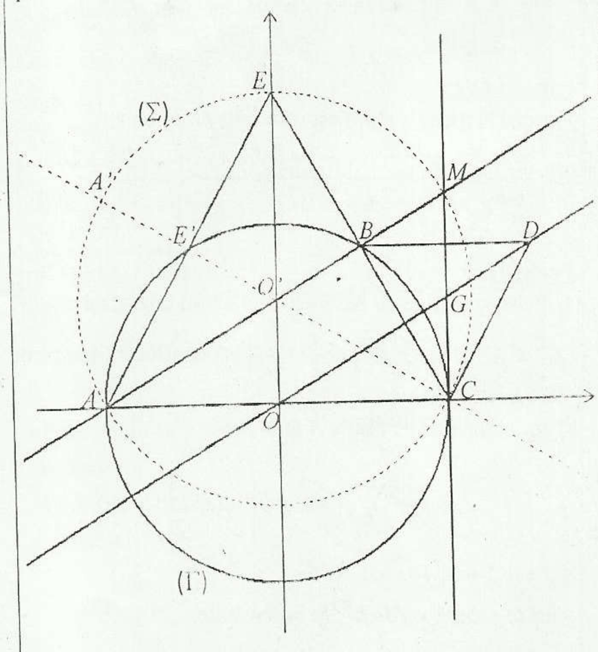
$x = -\overline{11} = \overline{2}$ ou $x = -\overline{3} = \overline{10}$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{\overline{2}, \overline{10}\right\}$.

PROBLEME 1

Partie I

1-



2- • - Comme les points B et C appartiennent au cercle Γ, on a $OB = OC$. Le point O appartient donc à la médiatrice du segment $[BC]$.

- Puisque le triangle BCD est équilatéral, on a $DB = DC$ et donc le point D appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

- De plus, le centre de gravité G du triangle BCD est aussi le centre de son cercle circonscrit. Par suite, $GB = GC$ et donc le point G appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

En conclusion, les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$.

• Soit I le milieu du segment $[CM]$.

- On sait que I appartient à la droite (CM) ou encore I appartient à la droite (CG). (1)

- D'autre part, comme le point B appartient au cercle Γ de diamètre $[AC]$, la droite (AB) c'est-à-dire la droite (BM) est perpendiculaire à la droite (CB). Par suite, le triangle CBM est rectangle en B. Il en résulte que I est le centre du cercle circonscrit au triangle CBM. Par suite I appartient à la médiatrice du segment $[CB]$ c'est-à-dire I appartient à la droite (DG). (2)

De (1) et (2), on déduit que le point I appartient à l'intersection des droites (CG) et (DG), par suite $I = G$.

Par conséquent G est le milieu du segment $[CM]$.

3- s est la similitude directe de centre C transformant B en M.

Angle θ de s

$$\theta = \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CG}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad [2\pi]$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

Rapport k de s

Puisque le triangle CBM est rectangle en B, on a :

$$k = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{\frac{CB}{CM}} = \frac{1}{\cos\left(\widehat{BCM}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Partie II

1- Puisque le triangle ACE est équilatéral direct, on a $AC = AE$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et donc E est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) = -1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+1)$$

$$z_E = -1 + 1 + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

Voir le point E sur la figure précédente.

2- Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$.

• Éléments caractéristiques de σ

Rapport k de σ

$$k = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{9+3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Angle θ de σ

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

Centre Ω de σ

$$z_\Omega = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3+i\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{4}}{\frac{1-i\sqrt{3}}{4}} = 1 = z_C$$

• On sait que s est la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. Par suite s^{-1} est la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

D'où $\sigma = s^{-1}$.

3- Soit E' l'image de E par σ, on a :

$$z_{E'} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\times\left(i\sqrt{3}\right) + \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

• $OE' = |z_{E'}| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$ donc $E' \in \Gamma$

4- • Puisque $\sigma(E) = E'$, on a $s(E') = E$ d'après la question II. 2-. Comme E' est un point de Γ privé des points A et C, alors E appartient à Σ.

• L'expression complexe de s est

$$z' = z_C + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z - z_C) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-1).$$

Comme $O' = s(O)$, on a

$$z_{O'} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(-1) = i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Notons ω l'affixe du centre de gravité du triangle ACE.

$$\omega = \frac{1}{3}(z_A + z_C + z_E) = \frac{1}{3}\left(-1+1+i\sqrt{3}\right) = i\frac{\sqrt{3}}{3} = z_{O'}$$

donc $O' = s(O)$ est le centre de gravité du triangle ACE.

• Σ est l'image par la similitude directe s du cercle Γ de centre O passant par E' (d'après II. 3-) et privé des points A et C. Σ est donc le cercle de centre $s(O) = O'$ passant par $s(E') = E$ et privé des points $s(A) = A'$ et $s(C) = C$.

Voir le tracé de Σ sur la figure précédente.

$x \geq -1$

$nx > -n$

$nx + n > 0.$

PROBLEME 2

Partie A

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

1- Soit h_n la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

a) La fonction h_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$ on a :

$$h_n'(x) = n \times \frac{1}{x+1} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{nx+n+1}{(1+x)^2}.$$

$h_n'(x)$ et $nx+n+1$ sont de même signe car $(1+x)^2 > 0$

Or pour $x > -1 : nx+n+1 > 0$ et donc pour $x > -1$, $h_n'(x) > 0$.

Par conséquent la fonction h_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

b) - $h_n(0) = n\ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = 0$

Comme la fonction h_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, alors :

- pour $x \in]-1;0]$ on a $h_n(x) \leq h_n(0)$ ou encore $h_n(x) \leq 0$
- pour $x \in [0;+\infty[$ on a $h_n(x) \geq h_n(0)$ ou encore $h_n(x) \geq 0$

2- a) - On a $f_1(x) = x\ln(1+x)$.

La fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$

- Pour $n > 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)$$

Par conséquent $f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$.

b) On suppose n impair.

$n-1$ est pair et donc pour tout $x > -1$, $x^{n-1} > 0$.

Comme $f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$, on en déduit que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe pour tout $x > -1$.

- Comme $\lim\limits_{x \to (-1)^+} x^n = -1$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(1+x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f_n(x) = +\infty$.
- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- $f_n(0) = 0^n \ln(1+0) = 0$

Tableau de variation de f_n

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) On suppose n pair.

$n-1$ est impair et comme $f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$, on a :

- pour tout $x \in]-1;0[$, $x^{n-1} < 0$ et donc $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de signes contraires.
- pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^{n-1} > 0$ et donc $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.

Par ailleurs on a :

- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} x^n = 1$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f_n(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

Tableau de variation de f_n

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- a) Etude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

On étudie le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ pour $x \in]-1;+\infty[$.

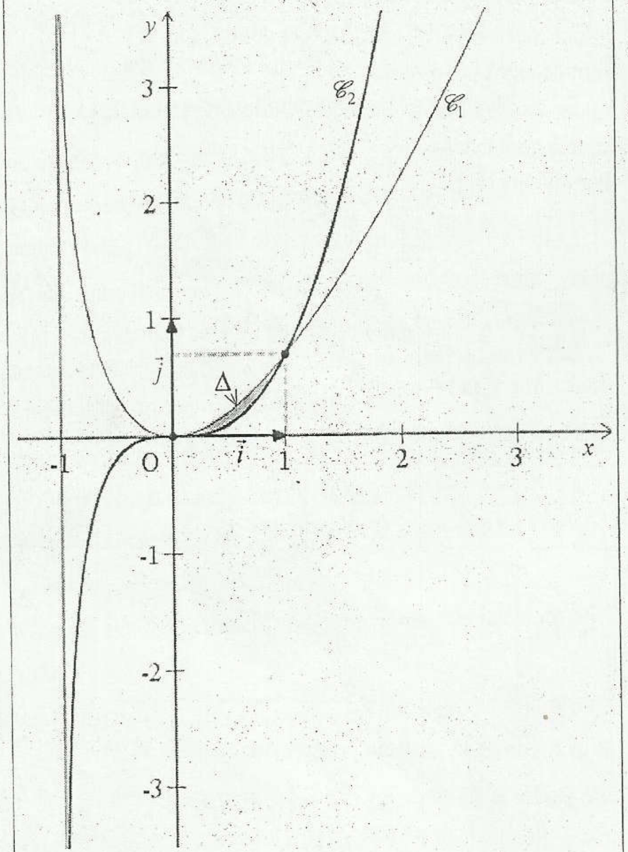
On a $f_1(x) - f_2(x) = x(1-x)\ln(1+x)$.

x	-1		0		1		$+\infty$
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_1(x) - f_2(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

- Pour $x \in]-1;0[\cup]0;1[$: la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$.
- Pour $x \in]1;+\infty[$: la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$.
- Pour $x = 0$ ou $x = 1$: les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un point d'intersection.

b) Tracés des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

- D'après les questions 2- b) et 2- c) on a $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_2(x) = -\infty$, par suite la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale pour les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$ donc lorsque $x \to +\infty$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont chacune une branche parabolique suivant l'axe $(y'Oy)$.



Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx, \quad n \geq 1.$$

1- a) Soit $x \in [0;1]$. On a $1 \leq 1+x \leq 2$

et par suite $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$

soit encore $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$ car $x^n > 0$.

Ainsi $\int_0^1 0 \cdot dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2\,dx$

soit encore $0 \leq u_n \leq \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Par conséquent $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

b) On sait que pour tout entier $n \geq 1$: $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) Soit n un entier naturel non nul.

Pour que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{100}$ il suffit de réaliser $\frac{\ln 2}{n+1} \leq \frac{1}{100}$

soit $n+1 \geq 100 \cdot \ln 2$ ou encore $n \geq -1 + 100 \cdot \ln 2$

Or $-1 + 100 \cdot \ln 2 \simeq 68{,}31$, alors en prenant $n_0 = 69$

on a pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{100}$.

2- a) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

b) Calcul de $u_1 = \int_0^1 x \ln(1+x)\,dx$.

Procédons par parties.

Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$u_1 = \frac{1}{4}$$

3- Pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n \quad [1].$$

a) On peut écrire $S_n(x) = 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n$.

On en déduit que $S_n(x)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = -x$ et de premier terme 1 c'est-à-dire la suite $\left((-x)^n\right), n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent

$$S_n(x) = \frac{1 \times \left(1 - (-x)^{n+1}\right)}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

ou encore $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \quad [2]$

b) $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

Procédons par parties.

Posons $u'(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(1+x)$

$$u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or d'après la relation $[2]$ on a :

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{S_n(x) - \frac{1}{1+x}}{-(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} S_n(x)$$

Et d'après la relation $[1]$ on a :

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\left(1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n\right)$$

Par suite

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\left(1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^1$$

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

4- • D'après ce qui précède, on en déduit que

$$u_2 = \frac{\ln 2}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}$$

• Soit Δ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 1$ et $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$.

L'aire de Δ est $\mathcal{A}(\Delta) = \int_0^1 \left[f_1(x) - f_2(x)\right]\mathrm{d}x \times 4cm^2$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left[\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x\right]\times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = (u_1 - u_2)\times 4cm^2 = \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}\right)\right)\times 4cm^2$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\frac{19}{9} - \frac{8\ln 2}{3}\right)cm^2 \quad \text{soit } \mathcal{A}(\Delta) \simeq 0{,}26\,cm^2$$

<u>Remarque</u> : Voir Δ, la partie hachurée, sur le graphique précédent.