CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

1- Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne, et totalise son gain algébrique x.

Le nombre de tous les tirages possibles est

$A^2_{n+10} = (n+10)(n+9)$

a) Valeurs possibles de x.

Puisque le gain algébrique x du joueur est lié aux couleurs des deux boules tirées, il y a trois possibilités :

- si le joueur tire deux boules blanches alors $x = (+2)+(+2) = +4$
- si le joueur tire deux boules rouges alors $x = (-3)+(-3) = -6$
- si le joueur tire une boule blanche et une boule rouge prises dans le désordre alors $x = (+2)+(-3) = -1$

D'où $x \in \{-6,-1,4\}$.

b) « le joueur perd 1 point » correspond à $x = -1$ c'est-à-dire « le joueur tire 1 boule banche parmi 10 et 1 boule rouge parmi n, dans le désordre ».

La probabilité demandée est

$$p = \frac{2A^1_{10}A^1_n}{(n+10)(n+9)} = \frac{2\times 10\times n}{(n+10)(n+9)} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$$

c) Calcul de probabilités

• A : « le joueur gagne 4 points » correspond à $x = +4$ c'est-à-dire « le joueur tire 2 boules blanches parmi 10 »

$$P(A) = \frac{A^2_{10}}{(n+10)(n+9)} = \frac{10\times 9}{(n+10)(n+9)}$$

$$P(A) = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$$

• B : « le joueur perd 6 points » correspond à $x = -6$ c'est-à-dire « le joueur tire 2 boules rouges parmi n »

$$P(B) = \frac{A^2_n}{(n+10)(n+9)} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$$

2- Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne.

Soit C l'événement « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages ».

C est l'événement contraire de $\overline{C}$: « obtenir aucune boule rouge au cours de ces 20 tirages »

$$P(\overline{C}) = \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} \text{ donc } P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$$

Par suite :

$$1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0{,}999 \text{ si et seulement si}$$

$$1 - 0{,}999 > \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} \text{ soit } 10^{-3} > \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$$

ou encore $\left(\frac{n+10}{10}\right)^{20} > 10^3$.

En passant au logarithme et en appliquant ses propriétés on obtient :

$20\ln(n+10) - 20\ln 10 > 3\ln 10$

$20\ln(n+10) > 23\ln 10$

$\ln(n+10) > \frac{23}{20}\ln 10$

$\ln(n+10) > \ln 10^{\frac{23}{20}}$

$n+10 > 10^{\frac{23}{20}}$

$n > 10^{\frac{23}{20}} - 10 \simeq 4{,}125...$

$n \geq 5$ car n est un entier naturel.

La valeur minimale de l'entier n est donc $n_0 = 5$.

Arithmétique

1- Soit (x, y) un couple d'entiers naturels tel que :

$PGCD(x, y) = 14$ et $xy = 2940$.

On sait que x et y sont multiples de leur PGCD.

Comme $PGCD(x, y) = 14$ on en déduit que $x = 14k$ et $y = 14k'$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$.

On a alors $xy = 2940$ si et seulement si $14k \times 14k' = 2940$ si et seulement si $k \times k' = 15$.

Comme l'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1;3;5;15\}$ on en déduit que (k,k') est l'un des couples $(1;15);(3;5);(5;3);(15;1)$.

Les couples $(x;y)$ solutions sont donc les couples $(14;210);(42;70);(70;42);(210;14)$.

2- a) On a $10^3 = 1000 = 143\times 7 - 1$ donc $10^3 \equiv -1 \quad (7)$.

b) Comme $N = 10^3 \times a + b$, on a d'après la question a), $N \equiv (-1)a + b \quad (7)$.

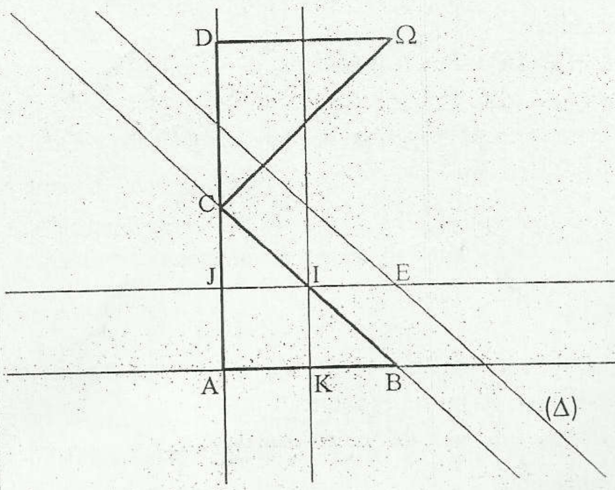
Donc N est divisible par 7 si et seulement si $b - a \equiv 0 \quad (7)$

Il en résulte que les entiers naturels N solutions sont : 1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007, 8001, 8008, 9002 et 9009.

SUJET TYPE IV

PROBLEME 1

Méthode géométrique



1- a) • Puisque r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} \neq 0\ [2\pi]$, donc $f = r \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

• Considérons la droite passant par le point I et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{IA}$, c'est-à-dire la droite (BC).

Décomposons r et t en produit de deux symétries orthogonales en introduisant à chaque fois la symétrie orthogonale $S_{(BC)}$ d'axe (BC).

$r = s_{(JI)} \circ s_{(BC)}$ où $s_{(JI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (JI).

$t = s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$ où (Δ) est la droite image de (BC) par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.

On a $f = r \circ t = s_{(JI)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)} = s_{(JI)} \circ s_{(\Delta)}$.

Or les droites (JI) et (BC) sont sécantes et les droites (BC) et (Δ) sont parallèles, donc les droites (JI) et (Δ) sont sécantes en un point E.

Il en résulte que E est le centre de la rotation f.

b) $g(K) = t \circ r(K) = t(r(K)) = t(E) = K$.

g est la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2- Soit S la similitude directe transformant D en C et C en B.

Rapport k de S :

$$k = \frac{S(D)S(C)}{DC} = \frac{CB}{DC} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$$

Angle θ de S :

$$\theta = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{S(C)S(D)}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

3- a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$ et donc

$$DC^2 = \overrightarrow{DC}^2 = \left(\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}\right)^2 = \overrightarrow{\Omega C}^2 - 2\overrightarrow{\Omega C}\cdot\overrightarrow{\Omega D} + \overrightarrow{\Omega D}^2$$

$$= \Omega C^2 - 2\Omega C \cdot \Omega D \cos\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}\right) + \Omega D^2$$

Or $\Omega C = S(\Omega)S(D) = \sqrt{2}\Omega D$ et $\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc $DC^2 = \left(\sqrt{2}\,\Omega D\right)^2 - 2\sqrt{2}\,\Omega D \times \Omega D \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \Omega D^2$

$$= 2\Omega D^2 - 2\Omega D^2 + \Omega D^2 = \Omega D^2$$

b) Par suite, $\Omega D = CD$ et donc le triangle $CD\Omega$ est isocèle en D. De plus, $\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et en particulier $\widehat{D\Omega C} = 45°$. On en déduit que $\widehat{DC\Omega} = 45°$ puis que $\widehat{CD\Omega} = 90°$.

D'où le triangle ΩDC est isocèle et rectangle en D.

4- On pose $\varphi = S \circ S$.

a) φ est la similitude plane directe de centre Ω, de rapport $k^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et d'angle $2\theta = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b) $\varphi(D) = S \circ S(D) = S(S(D)) = S(C) = B$.

Utilisation des nombres complexes

1- Affixes des points A, B, C, I et D.

$z_A = 0$

De $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on a $\frac{1}{2}(z_B - z_A) = 1$ soit $z_B = 2$

De $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, on a $\frac{1}{2}(z_C - z_A) = i$ soit $z_C = 2i$

$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = 1 + i$

$z_D = 2(z_C - z_A) = 4i$

2- a) S a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.

De $S(D) = C$ et $S(C) = B$ on a $\begin{cases} 4ia + b = 2i \\ 2ia + b = 2 \end{cases}$

$a = \frac{2i - 2}{2i} = 1 + i$

$b = 2 - 2i(1+i) = 4 - 2i$

L'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z + 4 - 2i$.

b) Affixe du centre Ω de S.

$$z_\Omega = \frac{4 - 2i}{1 - (1+i)} = \frac{4 - 2i}{-i} = 2 + 4i.$$

3- a) $z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = 1 + i$

$z_{\overrightarrow{C\Omega}} = z_\Omega - z_C = 2 + 4i - 2i = 2(1+i) = 2z_{\overrightarrow{AI}}$

$\overrightarrow{C\Omega} = 2\overrightarrow{AI}$

Les droites (AI) et $(C\Omega)$ sont donc parallèles.

b) Par suite, $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur directeur de la droite $(C\Omega)$.

Donc $\overline{S} = t \circ S_{(C\Omega)} = S_{(C\Omega)} \circ t$.

Il en résulte que $\overline{S}$ est la symétrie glissée d'axe la droite $(C\Omega)$ et de vecteur $\overrightarrow{IA}$.

c) On détermine d'abord les écritures complexes respectives de t et de $S_{(C\Omega)}$.

• t a pour écriture complexe $z' = z - 1 - i$

• $S_{(C\Omega)}$ a une écriture complexe de la forme

$z' = a\overline{z} + b$

Comme $S_{(C\Omega)}(C) = C$ et $S_{(C\Omega)}(\Omega) = \Omega$ on a :

$$\begin{cases} -2ia + b = 2i \\ (2-4i)a + b = 2 + 4i \end{cases}$$

$$a = \frac{2i - (2+4i)}{-2i - (2-4i)} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2}$$

$$= \frac{1-1+2i}{2} = i$$

$b = 2i + 2i(i) = -2 + 2i$

$z' = i\overline{z} - 2 + 2i$

D'où $\overline{S} = t \circ S_{(C\Omega)}$ a pour écriture complexe

$z' = (i\overline{z} - 2 + 2i) - 1 - i = i\overline{z} - 3 + i$

PROBLEME 2

Partie A

1- a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = (2-x)e^x - 1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 0 - 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$

$g'(x)$ a même signe que $(1-x)$ car $e^x > 0$.

Il en résulte que g est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Elle admet un maximum relatif $g(1) = e - 1$ en 1.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

b) • La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;1]$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty;1]$ sur $g(]-\infty;1]) =]-1;e-1]$.

Or 0 appartient à $]-1;e-1]$, il existe alors un unique réel α appartenant à $]-\infty;1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

D'autre part, $g(-2) = 4e^{-2} - 1 \approx -0{,}45 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a $-2 < \alpha < 0$.

• De même, g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1;+\infty[$ sur $g([1;+\infty[) =]-\infty;e-1]$.

Comme 0 appartient à $]-\infty;e-1]$, il existe alors un unique réel β appartenant à $[1;+\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$.

D'autre part, $g(1) = e - 1 > 0$ et $g(2) = -1 < 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a $1 < \beta < 2$

En conclusion la fonction g s'annule uniquement en deux réels α et β tels que $-2 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$.

c) • De $g(\alpha) = 0$ et g strictement croissante sur $]-\infty;1]$, on déduit que pour $x \in]-\infty;1]$ on a :

si $x < \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$ ou encore $g(x) < 0$

si $x = \alpha$ alors $g(x) = 0$

si $x > \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$

• De même de $g(\beta) = 0$ et g strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

on déduit que pour $x \in [1;+\infty[$ on a :

si $x < \beta$ alors $g(x) > g(\beta)$ ou encore $g(x) > 0$

si $x = \beta$ alors $g(x) = 0$

si $x > \beta$ alors $g(x) < g(\beta)$ ou encore $g(x) < 0$

d) De $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $(2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0$ on déduit

$e^\alpha = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

2- Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

a) • La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) = e^x - 1 \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq 1$ ou encore $x \geq 0$

$h'(x) = e^x - 1 \leq 0$ si et seulement si $e^x \leq 1$ ou encore $x \leq 0$

Il en résulte que la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Par suite :

- pour tout $x \leq 0$ on a $h(x) \geq h(0)$ (car h est strictement décroissante) ou encore $e^x - x - 1 \geq 0$ ou encore $e^x - x \geq 1$
- pour tout $x \geq 0$ on a $h(x) \geq h(0)$ (car h est strictement croissante) ou encore $e^x - x - 1 \geq 0$ ou encore $e^x - x \geq 1$

D'après ces résultats, on a donc :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x \geq 1 > 0$ ou encore $e^x - x > 0$

• On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x \neq 0$ et donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = 0$: Lorsque $x \to -\infty$ la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = 1$.

Lorsque $x \to +\infty$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

c) $f(x) - 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - 1 = \dfrac{x - 1}{e^x - x}$.

D'après la question 2- a), on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$, par suite $f(x) - 1$ a même signe que $x - 1$.

Tableau de signe de $f(x) - 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-1$		$-$	0	$+$	

Il en résulte que :

- pour $x < 1$: la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessous de la droite Δ.
- pour $x = 1$: la droite Δ coupe la courbe $(\mathcal{C})$.
- pour $x > 1$: la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite Δ.

3- a) $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

Comme $(e^x - x)^2 > 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

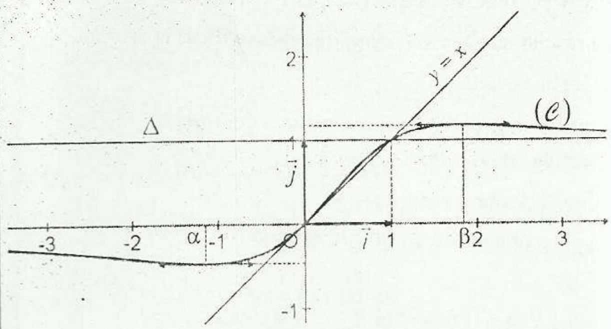
Des résultats de la question 1-, on déduit le tableau de variation de f ci-dessous :

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$f(\alpha)$	↗			$f(\beta)$	↘	1

• $f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} = \dfrac{\dfrac{1}{2-\alpha} - 1}{\dfrac{1}{2-\alpha} - \alpha}$ car $e^\alpha = \dfrac{1}{2 - \alpha}$

$f(\alpha) = \dfrac{1 - 2 + \alpha}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = \dfrac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

b) Tracés de Δ et $(\mathcal{C})$.



Partie B

1- D'après la question 3- de la partie A, on déduit que f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0;1]$.

Par suite pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors pour tout $x \in [0;1]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ c'est-à-dire $f(x) \in [0;1]$.

2- Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) Soit $x \in [0;1]$, on a :

$f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - (xe^x - x^2)}{e^x - x}$

$= \dfrac{e^x - x - 1 + x - (xe^x - x^2)}{e^x - x} = \dfrac{e^x - x - 1 - x(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

$= \dfrac{(1 - x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

D'où : $f(x) - x = \dfrac{(1 - x)h(x)}{e^x - x}$

b) D'après la question 2- a) de la partie A, on sait que pour tout $x \in [0;1]$, $h(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ et $e^x - x > 0$, donc $f(x) - x$ et $(1 - x)$ sont de même signe sur $[0;1]$.

Il en résulte que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x > 0$ c'est-à-dire la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (D) sur $[0;1]$.

3- a) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Une primitive F de f sur $[0;1]$ est donc définie par $F(x) = \ln|e^x - x| = \ln(e^x - x)$ car $e^x - x > 0$ sur $[0;1]$

b) Aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$\mathscr{A} = \left(\int_0^1 (f(x) - x)\,dx\right) \times 4cm^2 = 4cm^2 \times \left[\ln\left(e^x - x\right) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\mathscr{A} = \left(4\ln(e-1) - 2\right) cm^2$$

Remarque : $\mathscr{A} \simeq 0{,}17 cm^2$

4- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

et $u_1 = \dfrac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} - \frac{1}{2}} \simeq 0{,}56$. On a bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et montrons que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1} \leq 1$.

D'après l'hypothèse on a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Or on sait que la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Il en résulte que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

ou encore $u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1} \leq 1$

Comme $u_0 = \frac{1}{2} \leq u_1$, on a bien $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{(n+1)+1} \leq 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers un réel $\ell \leq 1$.

De plus la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2} \leq \ell$

La fonction f est continue en ℓ et comme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell$ équivaut à $f(\ell) - \ell = 0$ équivaut à $\dfrac{(1-\ell)h(\ell)}{e^\ell - \ell} = 0$

équivaut à $(1-\ell) = 0$ ou $h(\ell) = 0$

équivaut à $\ell = 1$ ou $\ell = 0$

On a donc $\ell = 1$ car $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.