CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

1- On sait que $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.

Or $p_3 = 2p_5 = \frac{2}{3}p_0$ et $p_5 = \frac{1}{3}p_0$, donc

$p_0 + \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_0 = 2p_0 = 1$.

Il en résulte que $p_0 = \frac{1}{2}$; $p_3 = \frac{1}{3}$ et $p_5 = \frac{1}{6}$.

2- a) A : « le joueur gagne la partie en 2 lancers »

1er lancer	2ème lancer
3 points	5 points
5 points	3 points
5 points	5 points

$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

b) Soit l'événement B : « le joueur gagne la partie en 3 lancers » et que $P(\mathrm{B}) = \frac{7}{36}$.

- L'événement C : « le joueur perd la partie » est le contraire de l'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: « le joueur gagne la partie ». Par suite

$P(\mathrm{C}) = 1 - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - \left(P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})\right)$

$P(\mathrm{C}) = 1 - \left(\frac{5}{36} + \frac{7}{36}\right) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Remarque : Pour vérifier que $P(\mathrm{B}) = \frac{7}{36}$, on pourrait utiliser un arbre associé à la situation.

3- Le joueur joue six parties.

L'événement « le joueur gagne au moins une partie » est le contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune partie ».

Puisque les parties sont indépendantes, la probabilité que le joueur ne gagne aucune partie est $\left(\frac{2}{3}\right)^6$. Il en résulte que la probabilité demandée est $p = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}$.

Arithmétique

1- Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $3^2 \equiv 1 \quad (8)$ donc $3^{2n} \equiv 1^n \quad (8)$ ou encore $3^{2n} \equiv 1 \quad (8)$ ou encore $3^{2n} - 1 \equiv 0 \quad (8)$.

On en déduit que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

- De $3^2 \equiv 1 \quad (8)$ et $3^{2n} \equiv 1 \quad (8)$

on déduit $3^{2n+2} \equiv 1 \quad (8)$ ou encore $3^{2n+2} + 7 \equiv 1 + 7 \quad (8)$

ou encore $3^{2n+2} + 7 \equiv 0 \quad (8)$

c'est-à-dire $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8.

- De même de $3^2 \equiv 1 \quad (8)$ et $3^{2n} \equiv 1 \quad (8)$

on déduit $3^{2n+4} \equiv 1 \quad (8)$ ou encore $3^{2n+4} - 1 \equiv 1 - 1 \quad (8)$

ou encore $3^{2n+4} - 1 \equiv 0 \quad (8)$

c'est-à-dire $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminons les restes de la division de 3^n par 8.

$3^0 = 0\times 8 + 1$ ou encore $3^0 \equiv 1 \quad (8)$

$3^1 = 0\times 8 + 3$ ou encore $3^1 \equiv 3 \quad (8)$

$3^2 = 1\times 8 + 1$ ou encore $3^2 \equiv 1 \quad (8)$

$3^3 = 3\times 8 + 3$ ou encore $3^3 \equiv 3 \quad (8)$

::::::::::::::

Donc

pour $n = 2k$, le reste est 1.

pour $n = 2k + 1$, le reste est 3.

3- Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

a) On suppose que $p = 2n + 1$.

D'après la question 2- on a :

$3^p \equiv 3 \quad (8)$

$3^{2p} \equiv 1 \quad (8)$

$3^{3p} = 3^{6n+3} = 3^{2(3n+1)+1} \equiv 3 \quad (8)$

$3^{4p} \equiv 1 \quad (8)$

$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p} \equiv 3 + 1 + 3 + 1 \quad (8)$

ou encore $A_p \equiv 8 \quad (8)$ ou encore $A_p \equiv 0 \quad (8)$

A_p est donc divisible par 8.

b) Soit a le nombre écrit dans la base trois par $a = \overline{11110}_{trois}$

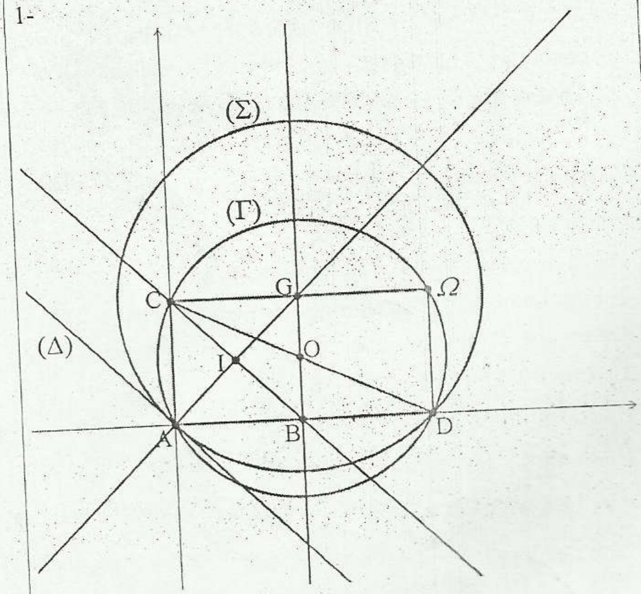
$a = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = A_1$

Or d'après la question précédente A_1 est divisible par 8 car $1 = 2\times 0 + 1$, donc a est divisble par 8.

PROBLEME 1

Partie I

1-



2- a) Le vecteur $m\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est égal à un vecteur $\vec{U}$ indépendant de m si $m+1+1=0$, soit $m=-2$.

• $\vec{U}=-2\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

b) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2+MB^2+MC^2=2l^2$.

On sait (résultat du cours) que

$$-2MA^2+MB^2+MC^2=2\overrightarrow{MA}\cdot\vec{U}-2AA^2+AB^2+AC^2$$
$$=2\overrightarrow{MA}\cdot\vec{U}+2l^2$$

Donc $-2MA^2+MB^2+MC^2=2l^2$ équivaut à $2\overrightarrow{MA}\cdot\vec{U}+2l^2=2l^2$ ou encore $\overrightarrow{MA}\cdot\vec{U}=\vec{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal au vecteur $\vec{U}=2\overrightarrow{AI}$.

Par suite (Δ) est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AI).

• Comme le triangle ABC est rectangle et isocèle en A et que I est le milieu du segment $[BC]$, il en résulte que la droite (AI) est la médiatrice du segment $[BC]$ et donc la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC).

Or la droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (AI) donc les droites (Δ) et (BC) sont parallèles.

3- a) G est le barycentre du système $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ équivaut à $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ soit $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Comme le triangle ABC est rectangle et isocèle en A et que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, il en résulte que le quadrilatère $ABGC$ est un carré.

b) Soit (Σ) l'ensemble des points M du plan tels que $-MA^2+MB^2+MC^2=2l^2$.

On sait (résultat du cours) que

$$-MA^2+MB^2+MC^2=MG^2-GA^2+GB^2+GC^2$$
$$=MG^2-2l^2+l^2+l^2$$
$$=MG^2$$

Donc $-MA^2+MB^2+MC^2=2l^2$ équivaut à $MG^2=2l^2$ ou encore $MG=\sqrt{2}\,l$.

(Σ) est le cercle de centre G et de rayon $r=\sqrt{2}\,l$.

Voir le tracé de (Σ) sur la figure précédente.

Partie II

Soit s la similitude directe qui transforme D en B et B en C

1- Méthode géométrique

a) Rapport k de s

$$k=\frac{s(D)s(B)}{DB}=\frac{BC}{DB}=\frac{l\sqrt{2}}{l}=\sqrt{2}$$

Angle α de la similitude s

$$\alpha=\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{s(D)s(B)}\right)=\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

• De $k=\sqrt{2}\neq 1$ on déduit que s admet un unique point invariant Ω qui est son centre.

b) On sait que $s\circ s$ est une similitude directe de centre Ω, de rapport $k^2=2$ et d'angle $2\alpha=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, par suite :

• $(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C})=\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{s\circ s(\Omega)s\circ s(D)}\right)$

$(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C})=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

• $\Omega C=s\circ s(\Omega)s\circ s(D)=2\Omega D$

c) • De $\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}\right)=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ on déduit que Ω appartient au cercle (Γ) de diamètre $[DC]$.

• On sait que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega B}$; par suite

$$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega B}\right)^2=\overrightarrow{\Omega C}^2-2\overrightarrow{\Omega C}\cdot\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega B}^2$$

$$BC^2=\Omega C^2-2\Omega C\cdot\Omega B\cdot\cos\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right)+\Omega B^2$$

$$BC^2=(2\Omega D)^2-2(2\Omega D)\cdot(\sqrt{2}\,\Omega D)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+(\sqrt{2}\cdot\Omega D)^2$$

$$BC^2=2\Omega D^2$$

$BC=\sqrt{2}\,\Omega D$ soit $\Omega D=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=l$

• $B\Omega=s(D)s(\Omega)=\sqrt{2}\,D\Omega=\sqrt{2}\,l=\sqrt{2}\,DB$

$\quad =s(D)s(B)$

$B\Omega=BC$

d) • Comme O est le centre du cercle (Γ) de diamètre $[CD]$ et que $\Omega \in (\Gamma)$ on a $O\Omega = OC$. Il résulte que O appartient à la médiatrice du segment $[\Omega C]$.

• De $BC = B\Omega$ on déduit que B appartient à la médiatrice du segment $[\Omega C]$.

La droite (OB) est donc la médiatrice du segment $[\Omega C]$.

- On sait que $(OB) \perp (AD)$ et $(OB) \perp (C\Omega)$ donc $(AD)\ //\ (C\Omega)$.

De plus $AD = 2l$ et $C\Omega = \Omega C = 2\Omega D = 2l$

On alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C\Omega}$

- Par ailleurs on a $\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Il en résulte que le quadrilatère $CAD\Omega$ est un rectangle.

Voir la construction du point Ω sur la figure précédente.

2- Utilisation des complexes

On pose $\vec{u} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormal $(A; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe.

a) Affixes des points B, C et D.

De $\vec{u} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AB}$ on a $\frac{1}{l}(z_B - z_A) = 1$ soit $z_B = l$

De $\vec{v} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AC}$ on a $\frac{1}{l}(z_C - z_A) = i$ soit $z_C = li$

De $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ on a $z_D = 2z_B = 2l$

b) La similitude s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.

De $s(D) = B$ et $S(B) = C$ on a $\begin{cases} 2la + b = l \\ la + b = li \end{cases}$

$la = l - li = l(1-i)$ soit $a = 1 - i$

$b = li - l(1-i) = l(-1+2i)$

L'écriture complexe de s est $z' = (1-i)z + l(-1+2i)$.

c) Affixe z_Ω de Ω

$$z_\Omega = \frac{l(-1+2i)}{1-(1-i)} = l(2+i).$$

PROBLEME 2

Partie A

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

1- a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x - x^2 - 4x - 4 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2} < 0$$

Par conséquent g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$,

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, on en déduit que

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$

c) Comme g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$, on en déduit que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x) \geq \frac{1}{4} > 0$.

Par conséquent on a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

2- La fonction g est strictement décroissante sur $[2;3]$.

Il en résulte que pour tout x de $[2;3]$, $g(x) \leq g(2)$.

Or $g(2) = \ln 4 - \ln 2 - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \ln 2 - \frac{1}{4} \simeq 0,44 < \frac{1}{2}$

Donc pour tout x de $[2;3]$, $g(x) < \frac{1}{2}$

II- On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ pour $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1- • Comme $x > 0$, alors $x + 2 > 0$ et donc

$$\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} x(\ln(x+2) - \ln x)$$

$$= \lim_{x\to0^+}(x\ln(x+2) - x\ln x) = 0 - 0 = 0$$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left[x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 0 + 0 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$, f est donc continue en 0.

2- • $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{1}{4}\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\dfrac{1}{4}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=+\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.

La fonction f n'est pas dérivable en 0.

• La courbe (C) admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 0.

3- a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

Posons $X=\dfrac{2}{x}$, on a si $x\to+\infty$ alors $X\to 0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=\lim\limits_{X\to 0^+}2\dfrac{\ln(1+X)}{X}=2\times 1=2.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=+\infty$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)-2\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}\right)\right)=2-2=0$

Il en résulte que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4- La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$f'(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+x\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{4}$

$=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{x+2}-1\right)+\dfrac{1}{4}$

$=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\left(\dfrac{x-x-2}{x+2}\right)+\dfrac{1}{4}$

$=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$

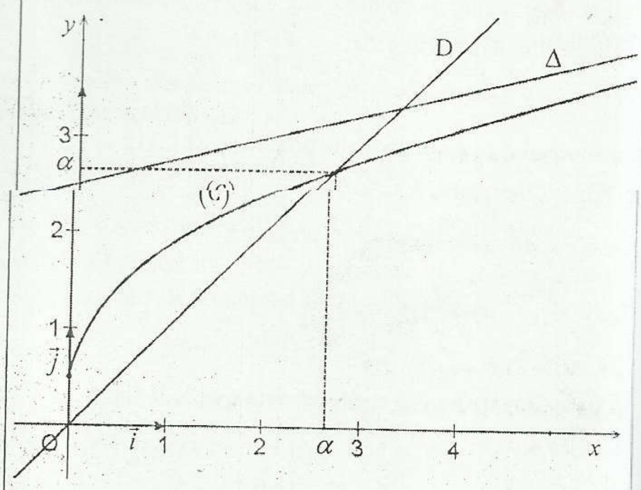
$=g(x)$

Comme pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x)>0$ d'après la question I-1- c), on en déduit que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$ $+\infty$

5- Tracés de la droite Δ, de la courbe (C) et de la droite D d'équation $y=x$.



Partie B

1- Soit h la fonction définie sur $I=[2;3]$ par $h(x)=f(x)-x$. La fonction h est dérivable sur I et $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1$ car $f'(x)=g(x)$.

Or on sait d'après la question 2- de la partie A que pour tout x de $[2;3]$, $g(x)<\dfrac{1}{2}$, donc $g(x)-1<-\dfrac{1}{2}<0$.

Par conséquent on a pour tout x de $[2;3]$, $h'(x)<0$.

2- On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur $I=[2;3]$.

• Comme la foction h est continue et strictement décroissante sur $I=[2;3]$, alors h réalise une bijection de $[2;3]$ sur $h([2;3])=[h(3);h(2)]$.

$h(3)=3\ln\dfrac{5}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}-3=3\ln\dfrac{5}{3}-\dfrac{7}{4}\simeq-0,21<0$

$h(2)=2\ln\dfrac{4}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{2}-2=2\ln 2-1\simeq 0,38>0$

On a $h(2)h(3) < 0$ et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans I.

Remarque : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans I *signifie* il existe un réel unique α dans I tel que $f(\alpha) = \alpha$.

3- a) D'après les résultats des questions 1- c) et 2- de la partie A, on en déduit que

pour tout $x \in I = [2;3]$, $0 < g(x) < \frac{1}{2}$.

Et, d'après la question 3-) de la partie A, on en déduit que pour tout $x \in I = [2;3]$, $f'(x) = g(x)$.

Par conséquent, on a pour tout $x \in I = [2;3]$, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

b) D'après ce qui précède, on en déduit que

f est dérivable sur $I = [2;3]$ et pour tout $x \in I$, $|f'(x)| < \frac{1}{2}$.

Comme $\alpha \in$ I d'après la question 2- , on a d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

pour tout $x \in I$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ ou encore

pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

4- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2 \in I = [2;3]$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$.

D'après l'hypothèse on a $u_n \in I$. Comme la fonction f est est croissante sur $I = [2;3]$, alors $f(2) \leq f(u_n) \leq f(3)$.

Or $f(2) = 2\ln 2 + 1 \simeq 2,39 \geq 2$

et $f(3) = 3\ln\frac{5}{3} + \frac{5}{4} \simeq 2,78 \leq 3$

donc $2 \leq f(u_n) \leq 3$ c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

ou encore $u_{n+1} \in I$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

b) • D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et donc

$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ d'après la question 3- b)

ou encore $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $u_{n+1} = f(u_n)$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (1)

• Montrons par récurrence que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2)

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et comme $2 \leq \alpha \leq 3$, on a $-3 \leq -\alpha \leq -2$ soit $-1 \leq 2 - \alpha \leq 0$ soit $|2 - \alpha| \leq 1$

c'est-à-dire $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ d'après (1)

.

Or par hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes ,

la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

d) Pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

il suffit de réaliser : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 10^3$

ou encore $n \geq 3\frac{\ln 10}{\ln 2}$.

Or $3\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 9,97$, donc le plus petit entier n_0 qui convient est $n_0 = 10$.

• Une valeur approchée de α, à 10^{-3} près, est u_{10}.

Remarque : La calculatrice donne $\alpha \simeq 2,654$

○○○○○○○○○○○○○○