CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

1-

	1^{er} élève	$2^{ème}$ élève	$3^{ème}$ élève
Nombre de choix	10	10	10

Le nombre de cas possibles est $N = 10\times10\times10 = 1000$.

2- Calcul de probabilités

• A : « les élèves choisissent des parfums deux à deux distincts ».

	1^{er} élève	$2^{ème}$ élève	$3^{ème}$ élève
Nombre de choix	10	9	8

$\text{Card}(A) = 10\times9\times8 = 720$

$P(A) = \frac{720}{1000} = \frac{18}{25}$.

• B : « les élèves choisissent le même parfum ».

	1^{er} élève	$2^{ème}$ élève	$3^{ème}$ élève
Nombre de choix	10	1	1

Le 1^{er} élève a dix choix de parfums, les deux suivants sont contraints de prendre le même parfum.

$\text{Card}(B) = 10\times1\times1 = 10$

$P(B) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$.

• C : « deux exactement des élèves choisissent le même parfum » est l'événement contraire de l'événement $A\cup B$.

$P(C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B))$

$P(C) = 1 - \left(\frac{18}{25} + \frac{1}{100}\right) = \frac{27}{100}$.

Arithmétique

1- Soit dans $\mathbb{N}$ le système $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$

a) • $239 - 5 = 234 = 18\times13$ donc $239 \equiv 5 \quad (13)$

• $239 - 1 = 238 = 14\times17$ donc $239 \equiv 1 \quad (17)$

L'entier 239 est bien solution du système.

b) Si N est un entier relatif solution du système alors il existe deux entiers relatifs x et y tels que $N = 1 + 17x$ et $N = 5 + 13y$ Par suite $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ et donc $17x - 13y = 4$.

2- a) Comme $17\times1 - 13\times1 = 4$ ainsi le couple $(1,1)$ est solution de l'équation $17x - 13y = 4$.

• Soient x et y deux entiers relatifs tels que $17x - 13y = 4$ donc $17x - 13y = 17\times1 - 13\times1$ soit $17(x-1) = 13(y-1)$.

Comme 13 et 17 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 13 divise $x - 1$ et que 17 divise $y - 1$. Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que $x - 1 = 13k$ et $y - 1 = 17k'$.

De l'égalité $17(x-1) = 13(y-1)$ on déduit $17\times13k = 13\times17k'$ soit $k = k'$.

Donc pour un certain entier k, on a $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$.

• Réciproquement si $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $17x - 13y = 17(1 + 13k) - 13(1 + 17k) = 4$ autrement dit le couple $(1 + 13k\,;\, 1 + 17k)$ est solution de l'équation $17x - 13y = 4$.

Les solutions de l'équation $17x - 13y = 4$ sont donc les couples $(x = 1 + 13k\,;\; y = 1 + 17k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) On sait d'après la question 1- b) que $N = 1 + 17x$ et d'après la question 2- a) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 13k$.

Par suite $N = 1 + 17(1 + 13k) = 18 + 221k$.

3- On sait d'après les questions précédentes que

si $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$ alors $N \equiv 18 \quad (221)$

Réciproquement, si $N \equiv 18 \quad (221)$ alors il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$. Par suite

• $N - 5 = 13 + 13\times17k = 13(1 + 17k)$ et donc $N \equiv 5 \quad (13)$

• $N - 1 = 17 + 17\times13k = 17(1 + 13k)$ et donc $N \equiv 1 \quad (17)$

N est solution du système $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$

PROBLEME 1

Partie I

1- Soit S la similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

$S(O) = B$ équivaut à $a\times0 + b = z_B$, soit $b = 6$.

$S(A) = O$ équivaut à $a(3i) + 6 = 0$, soit $a = \frac{-6}{3i} = 2i$

Il existe donc une similitude directe S et une seule transformant A en O et O en B, à savoir la similitude directe d'expression complexe $z' = 2iz + 6$.

Centre Ω de S : $z_\Omega = \frac{6}{1-2i} = \frac{6(1+2i)}{1+4} = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i$

Rapport k de S : $k = |2i| = 2$

Angle θ de S : $\theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

• S est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2- a) Soit f la similitude indirecte d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

$f(O) = B$ équivaut à $a \times 0 + b = z_B$, soit $b = 6$

$f(A) = O$ équivaut à $a(-3i) + 6 = 0$, soit $a = \dfrac{6}{3i} = -2i$

Il existe donc une similitude indirecte f et une seule transformant A en O et O en B, à savoir la similitude indirecte d' expression complexe $z' = -2i\overline{z} + 6$.

b) Soit K le point d'affixe $z = x + yi$.

K est invariant par f si et seulement si $-2i\overline{z} + 6 = z$

si et seulement si $-2i(x - yi) + 6 = x + yi$

si et seulement si $(x + 2y - 6) + (2x + y)i = 0$

si et seulement si $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

f admet un point invariant et un seul, le point $K(-2;4)$.

Partie II

1- On pose $g = f \circ h$ où h est l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

a) On sait que f est une similitude de rapport $|-2i| = 2$ et que h est une similitude de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Il résulte que $g = f \circ h$ est une similitude de rapport $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ et donc g est une isométrie.

De plus $g(K) = f \circ h(K) = f(h(K)) = f(K) = K$.

Conclusion : g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. On note z' l'affixe de $h(M)$ et z'' l'affixe de $M'' = g(M) = f(h(M))$. On a

$z' = \dfrac{1}{2}[z - (-2 + 4i)] + (-2 + 4i) = \dfrac{1}{2}z - 1 + 2i$

$z'' = -2i\overline{z'} + 6 = -2i\left(\overline{\dfrac{1}{2}z - 1 + 2i}\right) + 6 = -i\overline{z} + 2 + 2i$

• g a pour expression complexe $z'' = -i\overline{z} + 2 + 2i$.

c) Soit L un point de l'axe $(O;\vec{v})$ d'affixe yi où $y \in \mathbb{R}$.

L est invariant par g si et seulement si $-i(\overline{yi}) + 2 + 2i = yi$

si et seulement si $-y + 2 + (-y + 2)i = 0$

si et seulement si $y = 2$.

• g admet sur l'axe $(O;\vec{v})$ un point invariant et un seul : le point $L(0;2)$.

• Comme g est un antidéplacement ayant deux points distincts invariants, les points K et L, g est la réflexion d'axe (KL).

d) De la relation $g = f \circ h$ on déduit $g \circ h^{-1} = f \circ h \circ h^{-1}$ et donc $f = g \circ h^{-1}$.

En posant $h' = h^{-1}$, on a $f = g \circ h'$ où g est la reflexion d'axe (KL) et h' est l'homothétie de centre K et de rapport 2.

2- Soit Δ une droite.

On sait que l'image Δ' de Δ par h' est parallèle à Δ.

L'image par g de Δ' est parallèle à Δ' si et seulement si Δ' est parallèle ou perpendiculaire à la droite (KL)

ce qui équivaut à Δ est parallèle ou perpendiculaire à la droite (KL).

• $f(\Delta)$ est parallèle à Δ si et seulement si Δ est parallèle ou perpendiculaire à la droite (KL).

PROBLEME 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Partie A

1- a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(e^x + e^{-x}\right) = +\infty$

b) Soit $x \in [0;+\infty[$, on a :

$f(x) = \ln e^x\left(1 + e^{-2x}\right) = \ln e^x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$

$f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + e^{-2x}\right) = \ln(1 + 0) = 0$

Il en résulte que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote pour la courbe $(\mathscr{C})$.

d) Position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).

Etudions le signe de $f(x) - x = \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$

Comme $e^{-2x} > 0$ et donc $1 + e^{-2x} > 1$, par suite $\ln\left(1 + e^{-2x}\right) > 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in [0;+\infty[$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ).

2- La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{\left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)}$$

$f'(x)$ a le même signe que $\left(e^x - 1\right)$ car $\dfrac{\left(e^x + 1\right)}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)} > 0$.

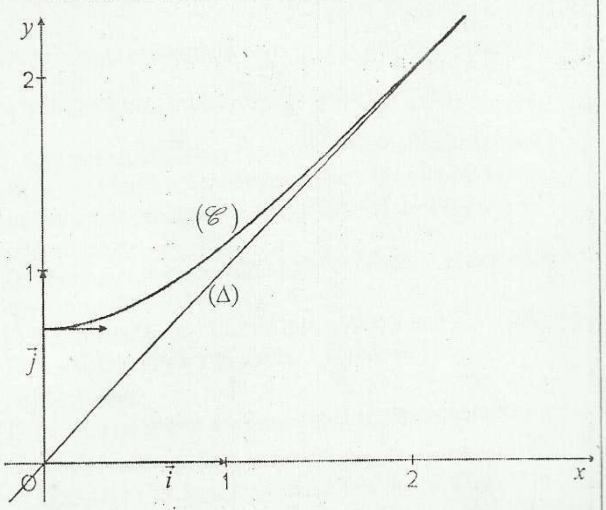
Or pour tout $x \geq 0$, on a $e^x \geq 1$ et donc $e^x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $f'(x) \geq 0$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$	$+\infty$

$\cdot\ f(0)=\ln\left(e^0+e^0\right)=\ln(1+1)=\ln 2.$

3- Tracés de la droite (Δ) et de la courbe $(\mathscr{C})$.



4- On considère l'équation différentielle : $(\mathrm{E}):\quad y''-y=0.$

a) L'équation caractéristique de (E) est $r^2-1=0$.

Cette équation admet deux solutions réelles $r_1=1$ et $r_2=-1$.

Les fonctions solutions de (E) sur $[0;+\infty[$ sont donc de la forme $x\mapsto C_1e^x+C_2e^{-x}$ où $C_1\in\mathbb{R}$ et $C_2\in\mathbb{R}$.

b) Soit h la solution de l'équation (E) qui vérifie : $h(0)=2$ et $h'(0)=0$.

Cette condition est vérifiée si et seulement si $\begin{cases}C_1+C_2=2\\C_1-C_2=0\end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases}C_1=1\\C_2=1\end{cases}$

La fonction h est donc définie par $h(x)=e^x+e^{-x}$

c) Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a bien :

$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)=\ln h(x).$

Partie B

Pour tout $x\in[0;+\infty[$ on pose $F(x)=\int_0^x\ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t.$

1- Soit x un réel strictement positif. D'après la question 1- de la partie A, on a $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-t\right)\mathrm{d}t$, il en résulte que $F(x)$ représente, en unité d'aire, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $t=0$ et $t=x$.

2- La fonction $t\mapsto\ln\left(1+e^{-2t}\right)$ est dérivable donc continue sur $[0;+\infty[$. Il en résulte que la fonction F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $F'(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)>0.$

Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

3- Soit a un réel strictement positif.

a) Soit $t\in[1;1+a]$, on a $1\le t\le 1+a$ donc $\frac{1}{1}\ge\frac{1}{t}\ge\frac{1}{1+a}$

ou encore $\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{t}\le 1.$

b) La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $[1;1+a]$, et d'après la question précédente on a pour tout $t\in[1;1+a]$

$\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{t}\le 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{1+a}\le\ln'(t)\le 1.$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis, on a alors

$$\frac{1}{1+a}(1+a-1)\le\ln(1+a)-\ln 1\le 1(1+a-1)$$

ou encore $\frac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$

4- • Soit x un réel strictement positif.

Soit $t\in[0;x]$. Posons $a=e^{-2t}>0.$

On a : $\frac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$ d'après la question 3-b

soit $\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\le\ln\left(1+e^{-2t}\right)\le e^{-2t}$

Par suite $\int_0^x\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t\le\int_0^x\ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t\le\int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t$

c'est-à-dire $\int_0^x\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t\le F(x)\le\int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t$

• On en déduit que :

$$\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2t}\right)\right]_0^x\le F(x)\le\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)+\frac{1}{2}\ln(1+1)\le F(x)\le-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\le F(x)\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

5- D'après ce qui précède on a

$$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\le F(x)\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$$

et par hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\ell.$

D'autre part on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}$$

D'après le théorème de comparaison on a donc :
$\frac{1}{2}\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

6- Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose : $u_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t$.

a) La fonction $t \mapsto h(t) = \ln\left(1+e^{-2t}\right)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(t) = \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} < 0$. Par suite, la fonction h est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [n;n+1]$, on a $0 \leq \ln\left(1+e^{-2t}\right) \leq \ln\left(1+e^{-2n}\right)$.

Par conséquent

$$\int_n^{n+1} 0 \times dt \leq \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt \leq \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2n}\right)dt$$

ou encore $0 \leq u_n \leq \ln\left(1+e^{-2n}\right)$.

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \ln\left(1+e^{-2n}\right)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+e^{-2n}\right) = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) On a $S_n = \int_0^1 \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^2 \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t + \int_2^3 \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t + \cdots + \int_n^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t$

$S_n = \int_0^{n+1} \ln\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t = F(n+1)$.

b) On sait, d'après la question 5- de la partie B) que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$, on en déduit que la suite (S_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = \ell$.