CORRIGE

EXERCICE

Probabilité

Une boîte contient 8 cubes :
- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte.

L'univers Ω des tirages possibles est l'ensemble des combinaisons de 3 cubes parmi 8.

$\text{Card}(\Omega) = C_8^3 = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$.

1- a) A : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » signifie « Obtenir 1 cube rouge parmi 4 et 1 cube vert parmi 3 et 1 cube jaune parmi 1 »

$\text{Card}(A) = C_4^1 C_3^1 C_1^1 = 4\times3\times1 = 12$

$P(A) = \dfrac{12}{56} = \dfrac{3}{14}$.

b) B : « Obtenir au plus un petit cube » signifie «(obtenir 1 petit cube parmi 5 et 2 gros cubes parmi 3) ou (obtenir 3 gros cubes parmi 3) ».

$\text{Card}(B) = C_5^1 C_3^2 + C_3^3 = 5\times3+1 = 16$

$P(B) = \dfrac{16}{56} = \dfrac{2}{7}$

2- L'enfant répète 5 fois l'épreuve « tirer simultanément 3 cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{2}{7}$.

a) La probabilité de l'événement « B est réalisé exactement 3 fois » est $p_a = C_5^3\left(\dfrac{2}{7}\right)^3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 = \dfrac{2000}{16807}$.

b) L'événement « B est réalisé au moins une fois » est le contraire de l'événement « B n'est jamais réalisé ».

Or la probabilité de l'événement « B n'est jamais réalisé » est $C_5^0\left(\dfrac{2}{7}\right)^0\left(\dfrac{5}{7}\right)^5 = \dfrac{3125}{16807}$ donc la probabilité de l'événement « B est réalisé au moins une fois » est

$p_b = 1-\dfrac{3125}{16807} = \dfrac{13682}{16807}$.

Arithmétique

1- a) Si A s'écrit 27 dans un système de base a alors en le convertissant en base 10, on a :

$27 = 2\times a^1 + 7\times a^0 = (2a+7)_{10}$.

Si par ailleurs A s'écrit 23 dans la base 10, on aura alors $2a+7=23$ soit $a=8$.

b) On commence par convertir $B=(6236)_7$ en base 10,

ainsi $B=(6236)_7 = 6\times7^3+2\times7^2+3\times7^1+6\times7^0 = 2183$

et, on convertit $B=(2183)_{10}$ dans la base 8.

On divise 2183 successivement par 8, jusqu'à l'obtention d'un quotient nul.

2183	8			
7	272	8		
	0	34	8	
		2	4	8
			4	0 ← quotient nul

En recopiant la suite des restes, on obtient : $B=(4207)_8$

2- $N=\overline{aba7} = 1000a+100b+10a+7$
$= 1010a+100b+7$

Par ailleurs $1010 = 7\times144+2$ et donc $1010\equiv2 \quad (7)$

De même $100 = 7\times14+2$ et donc $100\equiv2 \quad (7)$

Par suite $1010a+100b\equiv 2a+2b \quad (7)$

Finalement $N = 1010a+100b+7 \equiv 2a+2b+7 \quad (7)$

ou encore $N\equiv 2a+2b \quad (7)$

Si N est divisible par 7 alors $2a+2b\equiv0 \quad (7)$ ou encore $2(a+b)\equiv0 \quad (7)$. Comme 2 et 7 sont premiers entre eux et que 7 divise $2(a+b)$, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 7 divise $a+b$ c'est-à-dire $a+b$ est divisible par 7.

3- Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a<b$ et $\text{PPCM}(a,b)-\text{PGCD}(a,b)=1$.

On note $d=\text{PGCD}(a,b)$ et $m=\text{PPCM}(a,b)$.

On a alors $d\le a<b\le m=d+1$.

Ceci montre que $a=d$ et $b=m=d+1=a+1$.

Il en résulte que a divise $a+1$, puis divise $(a+1)-a=1$.

Donc, nécessairement $a=1$ et $b=2$.

Réciproquement, si $a=1$ et $b=2$ alors $d=1$, $m=2$ et on a bien $m-d=1$

PROBLEME 1

Partie A

1- Rapport k de la similitude s

$$k=\frac{s(\mathrm{A})s(\mathrm{B})}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{\mathrm{AB}}{2}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}$$

Angle θ de la similitude s

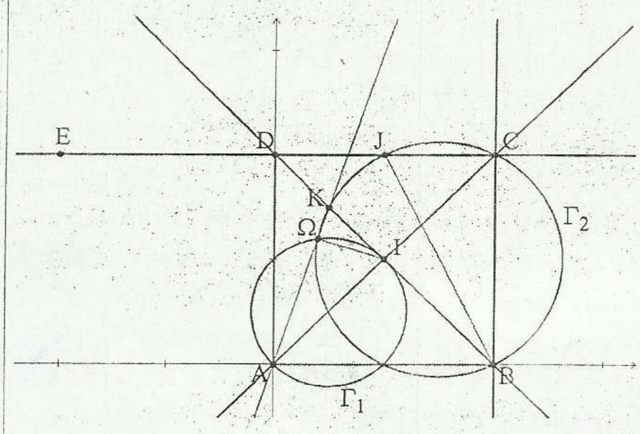
$$\theta=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{s(\mathrm{A})s(\mathrm{B})}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

2- Soit Ω le centre de la similitude s. On a :

- $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et donc Ω appartient au cercle Γ_1 de diamètre $[\mathrm{AI}]$;
- de même $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{J}}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ montre que Ω appartient au cercle Γ_2 de diamètre $[\mathrm{BJ}]$.

Ω est donc l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2.

Voir Ω sur la figure ci-dessous.



3- a) D'après la propriété de la similitude, l'image par s de la droite (AC) est une droite perpendiculaire à celle-ci contenant l'image de A, donc I : c'est la droite (BD).

De même, l'image de la droite (BC) par s est une droite perpendiculaire à celle-ci et contient l'image de B qui est J : c'est la droite (CD).

Comme C est commun à (AC) et (BC), son image est le point commun aux droites images (BD) et (CD) : c'est donc D.

b) D'après la propriété de la similitude, l'image K du milieu I du segment $[\mathrm{AC}]$ est le milieu du segment image $[\mathrm{ID}]$.

4- On pose $h=s\circ s$.

a) h est la similitude directe de centre Ω, de rapport $k^2=\frac{1}{4}$ et d'angle $2\theta=\pi$; donc h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{4}$.

b) $h(\mathrm{A})=s(s(\mathrm{A}))=s(\mathrm{I})=\mathrm{K}$. Or h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{4}$ on a donc $\overline{\Omega\mathrm{K}}=\frac{1}{4}\overline{\Omega\mathrm{A}}$.

Ceci montre que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

On donne $z_A=0$; $z_B=2$; $z_C=2+2i$; $z_D=2i$.

Il en résulte que $z_I=\frac{1}{2}(z_A+z_C)=1+i$

et que $z_J=\frac{1}{2}(z_C+z_D)=1+2i$

1- La similitude s a une écriture complexe de la forme $z'=az+b$ où $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$.

De $s(\mathrm{A})=\mathrm{I}$ on a : $a\times 0+b=1+i$ soit $b=1+i$

De $s(\mathrm{B})=\mathrm{J}$ on a : $2a+1+i=1+2i$ soit $a=\frac{1}{2}i$

L'écriture complexe de s est donc $z'=\frac{1}{2}iz+1+i$.

2- Affixe z_Ω du centre Ω de s

$$z_\Omega=\frac{1+i}{1-\frac{1}{2}i}=\frac{(1+i)\left(1+\frac{1}{2}i\right)}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+1\right)i}{\frac{5}{4}}=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i.$$

3- $s(\mathrm{E})=\mathrm{A}$ équivaut à $\frac{1}{2}iz_E+1+i=0$

On a donc $z_E=\frac{-1-i}{\frac{1}{2}i}=2(-1+i)=-2+2i.$

Voir le point E sur la figure ci-contre.

PROBLEME 2

Partie A

On considère la fonction I définie pour $x\in\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{I}(x)=\int_0^x(x-t)e^t\,dt$$

1- Posons $u'(t)=e^t$ et $v(t)=x-t$

$u(t)=e^t$ et $v'(t)=-1$

$$\mathrm{I}(x)=\left[(x-t)e^t\right]_0^x+\int_0^x e^t\,dt=\left[(x-t)e^t\right]_0^x+\left[e^t\right]_0^x$$

$$\mathrm{I}(x)=(0-x)+(e^x-1)=e^x-(1+x)$$

D'où $\mathrm{I}(x)=e^x-(1+x)$

2- a) Soit x un réel strictement positif.

- Pour tout $t\in[0\,;x]$, on a $0\le t\le x$ et donc $e^0\le e^t\le e^x$ ou encore $1\le e^t\le e^x$.
- On en déduit que

$(x-t)\le(x-t)e^t\le(x-t)e^x$ car $x-t\ge 0$

par suite $\int_0^x(x-t)\,dt\le\int_0^x(x-t)e^t\,dt\le\int_0^x(x-t)e^x\,dt$

ou encore

$$\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x (x-t)e^t\,\mathrm{d}t \le e^x\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le I(x) \le e^x\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\left(x^2-\frac{x^2}{2}-0\right) \le I(x) \le e^x\left(x^2-\frac{x^2}{2}-0\right)$$

D'où $\dfrac{x^2}{2} \le I(x) \le \dfrac{x^2e^x}{2}$

b) Soit x un réel strictement négatif.

• Pour tout $t\in[x;0]$, on a $x\le t\le 0$ et donc $e^x \le e^t \le e^0$ ou encore $e^x \le e^t \le 1$.

• On en déduit que $(x-t)e^x \ge (x-t)e^t \ge (x-t)$ car $x-t\le 0$

On a $\int_x^0 (x-t)e^x\mathrm{d}t \ge \int_x^0 (x-t)e^t\,\mathrm{d}t \ge \int_x^0 (x-t)\,\mathrm{d}t$

par suite $\int_0^x (x-t)e^x\mathrm{d}t \le \int_0^x (x-t)e^t\,\mathrm{d}t \le \int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t$

$$e^x\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x (x-t)e^t\,\mathrm{d}t \le \int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$e^x\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le I(x) \le \left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

D'où $\dfrac{x^2e^x}{2} \le I(x) \le \dfrac{x^2}{2}$

3- • D'après la question 2- a) on a pour $x>0$

$\dfrac{x^2}{2} \le \mathrm{I}(x) \le \dfrac{x^2e^x}{2}$ ou encore $\dfrac{x^2}{2} \le e^x-(1+x) \le \dfrac{x^2e^x}{2}$

donc $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \dfrac{e^x}{2}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

• De même, d'après la question 2- b) on a pour $x<0$

$\dfrac{x^2e^x}{2} \le \mathrm{I}(x) \le \dfrac{x^2}{2}$ ou encore $\dfrac{x^2e^x}{2} \le e^x-(1+x) \le \dfrac{x^2}{2}$

donc $\dfrac{e^x}{2} \le \dfrac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \dfrac{1}{2}$

Comme $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{e^x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, alors

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Partie B

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \mathrm{f}(0)=1 \\ \mathrm{f}(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \quad \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

1- a) Etude de la continuité de f en 0.

$$\lim_{x\to0}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1=\mathrm{f}(0)$$

f est donc continue en 0.

Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$ d'après la question 3- de la partie A.

f est donc dérivable en 0 et $\mathrm{f}'(0)=\dfrac{1}{2}$.

b) Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0..

$y=\mathrm{f}'(0)(x-0)+\mathrm{f}(0)=\dfrac{1}{2}x+1$.

$y=\dfrac{1}{2}x+1$.

2- a) La fonction g définie par $\mathrm{g}(x)=e^x(x-1)+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{g}'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$.

$\mathrm{g}'(x)$ et x sont de mêmes signes car $e^x>0$.

Il en résulte que :

$\mathrm{g}'(x)<0$ si et seulement si $x<0$

$\mathrm{g}'(x)>0$ si et seulement si $x>0$

$\mathrm{g}'(x)=0$ si et seulement si $x=0$

Par conséquent g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

g admet un minimum $\mathrm{g}(0)=0$ en 0.

b) De ce qui précède, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{g}(x)\ge0$.

3- a) On sait que f est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

D'autre part f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

et pour $x\neq0$, on a $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$.

Donc $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{\mathrm{g}(x)}{x^2}$. Il en résulte que $\mathrm{f}'(x)$ a le même signe que $\mathrm{g}(x)$ car $x^2>0$.

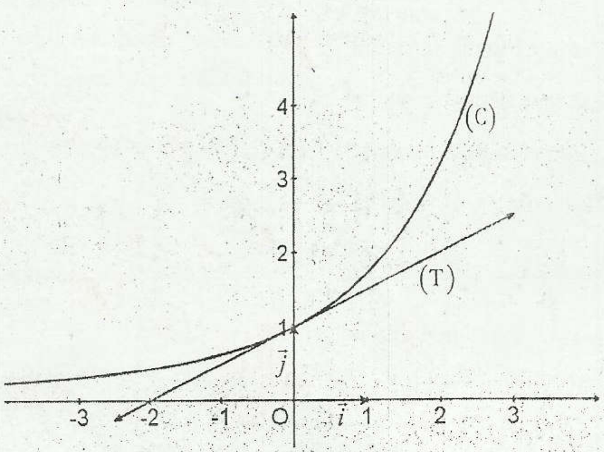
Tableau de variation de f.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Constructions de (C) et (T)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, donc lorsque $x\to+\infty$ la courbe (C) a une branche parabolique suivant l'axe $(y'Oy)$.



4- Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$

a) Comme la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0\,;+\infty[$, la fonction F est donc dérivable sur $[0\,;+\infty[$, en particulier F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $F'=f$.

b) Comme F est dérivable en 0, elle est donc continue en 0, par suite $\lim\limits_{x\to0}F(x)=F(0)=0$.

5- a) Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$

Posons $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

$u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

$$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1$$

$$\int_0^1 xe^x dx=e-0-(e-1)=1$$

b) D'après la question 2- a) de la partie A, on a pour tout $x>0$: $\dfrac{x^2}{2}\le e^x-(1+x)\le\dfrac{x^2e^x}{2}$, soit

$$\frac{x}{2}\le\frac{e^x-1}{x}-1\le\frac{xe^x}{2}\quad\text{ou encore}\quad 1+\frac{x}{2}\le\frac{e^x-1}{x}\le1+\frac{xe^x}{2}$$

$$\int_0^1\left(1+\frac{x}{2}\right)dx\le\int_0^1\left(\frac{e^x-1}{x}\right)dx\le\int_0^1\left(1+\frac{xe^x}{2}\right)dx$$

$$\int_0^1\left(1+\frac{x}{2}\right)dx\le F(1)\le\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^x dx$$

$$\left[x+\frac{x^2}{4}\right]_0^1\le F(1)\le[x]_0^1+\frac{1}{2}\times1\quad\text{car}\quad\int_0^1 xe^x dx=1$$

D'où $\dfrac{5}{4}\le F(1)\le\dfrac{3}{2}$

- On en conclut que l'aire $F(1)$ du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, est comprise entre $\dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{3}{2}$.

Partie C

On considère l'équation différentielle : $(E)\quad y'-y=e^x-1$

1- $h'(x)-h(x)=e^x+xe^x-\left(xe^x+1\right)=e^x-1$

donc la fonction h est solution de l'équation (E).

2- Soit φ une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$,

$(\varphi+h)$ est solution de l'équation (E)

si et seulement si $(\varphi+h)'-(\varphi+h)=e^x-1$

si et seulement si $\varphi'+h'-\varphi-h=e^x-1$

si et seulement si $\varphi'-\varphi+h'-h=e^x-1$

si et seulement si $\varphi'-\varphi+e^x-1=e^x-1$ car $h'-h=e^x-1$

si et seulement si $\varphi'-\varphi=0$

si et seulement si φ est solution de l'équation (E')

3- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E'): $y'-y=0$, est l'ensemble des fonctions φ de la forme $x\mapsto\varphi(x)=Ce^x$, où $C\in\mathbb{R}$.

- D'après la question 2-, $\varphi+h$ est donc solution de (E).

Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est l'ensemble des fonctions y de la forme $x\mapsto y(x)=Ce^x+xe^x+1=(C+x)e^x+1$, où $C\in\mathbb{R}$.

4- De $y(x)=(C+x)e^x+1$, on déduit :

$y(0)=0$ équivaut à $(C+0)e^0+1=0$, donc à $C=-1$.

Il existe donc une solution et une seule de (E) qui s'annule en 0, à savoir la fonction $x\mapsto(x-1)e^x+1$.

C'est la fonction g définie dans la question 2- a) de la partie B.

○○○○○○○○○○○○○○○