

**EXERCICE 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $[a ; b]$  donc  $g - f$  est continue sur  $[a ; b]$  Pour tout  $x$  de  $[a ; b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  donc  $g(x) - f(x) \geq 0$

donc  $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \text{ et } \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0 \text{ donc}$$
$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ soit } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

**Partie B**

1. a. Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f_1(x) = \ln(1+x)$ .

Soit  $X = 1+x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$ ;

$f_1(x) = \ln X$  or  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ .

- b.  $f_1$  est la composée de deux fonctions :

$x \mapsto 1+x$  continue et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ , à valeurs dans  $[1 ; +\infty[$  et

$x \mapsto \ln x$ , continue et dérivable sur  $[1 ; +\infty[$ , donc  $f_1$  est continue et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

$f_1'(x) = \frac{1}{x+1}$  donc pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f_1'(x) > 0$  donc  $f_1$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

- c. Soit :  $u'(x) = 1$        $u(x) = x+1$   
 $v(x) = \ln(1+x)$      $v'(x) = \frac{1}{x+1}$

$u$  et  $v$  sont continues et dérivables sur  $[0 ; +\infty[$ , de même que  $u'$  et  $v'$  donc

$$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx;$$

$$I_1 = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1 dx = 2\ln 2 - 0 - 1;$$

$$I_1 = 2\ln 2 - 1.$$

$f_1(0) = 0$  et  $f_1$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$  donc  $f_1$  est positive sur  $[0 ; 1]$ .

$f_1$  est continue sur  $[0 ; 1]$  donc  $I_1$  est l'aire (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = 1$  et la courbe représentative de  $f_1$ .

grandprof.net

2. a. Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f_n$  est la composée de deux fonctions continues sur  $[0; +\infty[$  :  
 $x \mapsto 1 + x^n$  et  $x \mapsto \ln x$  donc  $f_n$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .  
 Pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $0 \leq x^n \leq 1$  donc  $1 \leq 1 + x^n \leq 2$ .  
 La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  donc  $\ln 1 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln 2$ .  
 La fonction  $f_n$  est continue sur  $[0; 1]$  et pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  
 $0 \leq f_n(x) \leq \ln 2$ .  
 Donc pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2 \, dx$ , soit  
 $0 \leq I_n \leq \ln 2$ .
- b. Pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $0 \leq x \leq 1$  donc par produit par  $x^n \geq 0$ ,  
 $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$  puis  $1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$ .  
 La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  donc  $\ln 1 \leq \ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$ , soit  $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ .  
 Les fonctions  $f_{n+1}$  et  $f_n$  sont continues sur  $[0; 1]$  et pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$  donc  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ .  
 La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0.
- c. La suite  $(I_n)$  décroissante et minorée par 0 est donc convergente vers un nombre positif.
3. a.  $g$  est la différence de deux fonctions continues dérivables sur  $[0; +\infty[$  :  
 $x \mapsto x$  et  $x \mapsto f_1(x)$  donc  $g$  est continue et dérivable sur  $[0; +\infty[$   
 et  $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$ .  
 Pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) < 0$  et  $g'(0) = 0$  donc  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .
- b.  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$  et  $g(0) = 0$  donc  $g$  est strictement négative sur  $[0; +\infty[$ .  
 Si  $x$  est un réel positif alors pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x^n$  est un réel positif donc  $g(x^n) \leq 0$  donc pour tout entier naturel  $n$  non nul, et pour tout  $x$  réel positif, on a :  $\ln(1 + x^n) - x^n \leq 0$  soit  $\ln(1 + x^n) \leq x^n$ .
- c. Les fonctions  $f_n$  et  $x \mapsto x^n$  sont continues sur  $[0; +\infty[$  et pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$  on a :  $0 \leq \ln(1 + x^n) \leq x^n$  ; donc  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$ , soit  
 $0 \leq I_n \leq \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$ , ou encore  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
 Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

grandprof.net

1. Un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases} \text{ est } \vec{u} \text{ de coordonnées } (1; -2; 3).$$

Un vecteur normal au plan P est  $\vec{n}$  de coordonnées (1; 2; 1). Or

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux, la droite D est parallèle au plan P dont une équation cartésienne est :  $x+2y+z-3=0$ .

Il était possible aussi de chercher le(s) point(s) d'intersection de D et de P et chercher  $t$  tel que  $(t+2) + 2(-2t) + (3t-1) = 0$  ceci est équivalent à  $1 = 0$  ce qui est impossible, donc D et P n'ont pas de point commun, D est strictement parallèle à P. **VRAI**

2. Pour chercher les points communs à ces trois plans il faut résoudre le

$$\text{système : } \begin{cases} x-2y+3z = 3 & L_1 \\ 2x+3y-2z = 6 & L_2 \\ 4x-y+4z = 12 & L_3 \end{cases}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 \text{ et } L_3 - L_1 \text{ conduisent au système : } \begin{cases} x-2y+3z = 3 \\ 7x+5z = 21 \text{ soit} \\ 7x+5z = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+3z = 3 \\ 7x+5z = 21 \end{cases}$$

L'intersection de deux plans est une droite donc **FAUX**.

3. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites citées, il faut chercher des réels  $t$  et  $u$  tels que

$$\begin{cases} x = 2-3t = 7+2u \\ z = -3+2t = -6-u \\ y = 1+t = 2+2u \end{cases} \text{ donc résoudre le système } \begin{cases} 3t+2u = -5 \\ 2t+u = -3 \\ t-2u = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2t+u = -3 \\ t-2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t = -5 \\ t-2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \end{cases} \text{ et dans ce}$$

cas on a bien  $3t+2u = -5$  donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est A(5; 0; -5). **VRAI**

4. On considère les points A, de coordonnées (-1; 0; 2), B de coordonnées (1; 4; 0), et C, de coordonnées (3; -4; -2). Le plan (ABC) a pour équation  $x+z=1$ .

$\vec{AB}$  a pour coordonnées (2; 4; -2)

$\vec{AC}$  a pour coordonnées (4; -4; -4)

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe. Les coordonnées de A, B et C vérifient  $x+z=1$  donc le plan (ABC) a pour équation  $x+z=1$ . **VRAI**.

5.  $\vec{AB}$  a pour coordonnées (3; 0; -3)

$\vec{AC}$  a pour coordonnées (5; -2; 2)

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc C n'appartient pas à la droite (AB).

On ne peut pas écrire C comme barycentre des points A et B donc **FAUX**.

## EXERCICE 3

5 points

grandprof.net

Commun à tous les candidats

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité.

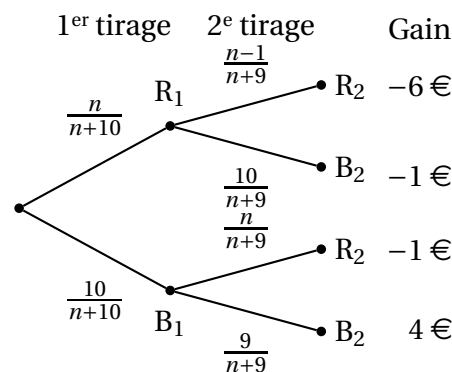
Le nombre initial de boules est  $n + 10$ , le joueur choisit une boule donc a  $(n + 10)$  choix possibles et ne remet pas cette boule dans l'urne donc le nombre de boules possibles lors du second tirage est  $(n + 9)$ .

- a. Lors d'un tirage de deux boules,
- soit le joueur tire deux boules blanches, et gagne 4 €
  - soit le joueur tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne  $2 - 3 = -1$  €
  - soit le joueur tire deux boules rouges, et gagne  $-6$  €.

Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et  $n - 1$  boules rouges.

Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et  $n$  boules rouges.

D'où l'arbre de choix :



$$p(X = -1) = \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} + \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

$$\text{b. } p(X = -6) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}.$$

$$p(X = 4) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

- c.  $E(X) = 4p(X = 4) + (-1)p(X = -1) + (-6)p(X = -6)$  donc

$$E(X) = \frac{360}{(n+10)(n+9)} - \frac{20n}{(n+10)(n+9)} - \frac{6n(n-1)}{(n+10)(n+9)}.$$

$$E(X) = \frac{-6n^2 + 6n - 20n + 360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

- d.  $E(X) > 0 \iff -6n^2 - 14n + 360 > 0$ .

$-6x^2 - 14x + 360 = 0$  or  $\Delta = 14^2 + 4 \times 6 \times 360 = 94^2$ , donc les solutions sont  $x_1 = -9$ ,  $x_2 = \frac{20}{3}$ . Le trinôme est négatif sauf entre les racines,

grandprof.net

donc  $n$  étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si  $2 \leq n \leq 6$ .

2. Les événements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont

contraires donc :  $p = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$ .

$$p > 0,999 \iff \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 1 - 0,999 \iff \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \iff$$

$$\frac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \iff n+10 > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \iff n > \frac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \iff$$

$$n \geq 5.$$

3.  $P(Z \leq k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x} dx = [-e^{-0,01x}]_0^k$  donc  $P(Z \leq k) = 1 - e^{-0,01k}$ .

a.  $P(Z \leq 50) = 1 - e^{-0,01 \times 50} = 1 - e^{-0,5}$  donc  $P(Z \leq 50) \approx 0,39$ .

b.  $P(Z \leq 60 / Z > 50) = \frac{P(50 < Z \leq 60)}{P(Z > 50)}$ .

$$P(50 < Z \leq 60) = \int_{50}^{60} 0,01e^{-0,01x} dx = [-e^{-0,01x}]_{50}^{60} = e^{-0,5} - e^{-0,6}.$$

$$P(Z \leq 50) = 1 - e^{-0,5} \text{ donc } P(Z > 50) = 1 - P(Z \leq 50) = e^{-0,5}, \text{ donc}$$

$$P(Z \leq 60 / Z > 50) = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1}.$$

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

1. Si  $n = 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$  devient :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 \text{ soit } u_1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3};$$

- Si  $n = 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$  devient :

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 \text{ soit } u_2 = -\frac{14}{9}.$$

- Si  $n = 2$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$  devient :

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 \text{ soit } u_3 = -\frac{14}{27}.$$

2. a. Si  $n = 3$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$  devient :

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 \text{ soit } u_4 = \frac{67}{81}, \text{ donc } u_4 \geq 0.$$

La propriété est vraie pour  $n = 4$ .

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout  $n \geq 4$ , si  $u_n \geq 0$  alors  $u_{n+1} \geq 0$ .

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2; \text{ comme } n \geq 4, n - 2 > 0, \text{ de plus } \frac{1}{3}u_n \geq 0.$$

La somme de nombres positifs étant un nombre positif, donc

grandprof.net

$$\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0 \text{ soit } u_{n+1} \geq 0.$$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel  $n \geq 4$ .

- b.** En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$ .

$$u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 4 - 2 = \frac{553}{243}, \text{ soit } u_5 \approx 2,28 \text{ donc } u_5 \geq 5 - 3.$$

La propriété est vraie pour  $n = 5$ ;

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout  $n \geq 5$ , si  $u_n \geq n - 3$  alors  $u_{n+1} \geq n + 1 - 3$  ou encore  $u_{n+1} \geq n - 2$ .

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2, \quad n \geq 5 \text{ donc } u_n \geq n - 3 \text{ donc}$$

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{3}(n - 3) + n - 2 \text{ soit } u_{n+1} \geq \frac{1}{3}n + n - 1 - 2; \text{ comme } n \geq 5,$$

$$\frac{1}{3}n \geq 1 \text{ donc } u_{n+1} \geq 1 + n - 1 - 2 \text{ soit } u_{n+1} \geq n - 2.$$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel  $n \geq 5$ .

*Remarque :* On peut également montrer que l'on vient de démontrer que pour  $n \geq 4$ ,  $u_n \geq 0$ , d'où  $\frac{1}{3}u_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq n - 2 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq (n + 1) - 3 \Leftrightarrow u_n \geq n - 3$ .

- c.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$  et pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $u_n \geq n - 3$  donc d'après le théorème de comparaison :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**3. a.**  $v_{n+1} = -2u_n + 1 + 3(n + 1) - \frac{21}{2} \Leftrightarrow$

$$v_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2};$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} \times (-2u_n) + \frac{1}{3} \times 3n - \frac{1}{3} \times \frac{21}{2};$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} \left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier

$$\text{terme } v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}.$$

$$\text{Donc } v_n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

**b.**  $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  donc  $-2u_n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}$

$$\text{soit } 2u_n = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2};$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2} \right] \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N},$$

grandprof.net

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } S_n &= \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{25}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1), \\ \text{soit } S_n &= \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3n^2}{4} - \frac{9n}{2} - \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

1. Soit  $(a, b)$  un tel couple et  $d = \text{PGCD}(a, b)$ . Il existe deux entiers  $u$  et  $v$  premiers entre eux tels que  $a = du$  et  $b = dv$ .

Donc en remplaçant :  $(du)^2 = (dv)^3$  soit  $d^2 u^2 = d^3 v^3$  et comme  $d \neq 0$ ,  $u^2 = dv^3$ .

2.  $u^2 = dv^3$  donc  $v$  divise  $u^2$ , soit  $v$  divise  $u \times u$ ; d'après le théorème de Gauss,  $v$  divise  $u \times u$  et  $v$  et  $u$  sont premiers entre eux, donc  $v$  divise  $u$ .

$\text{PGCD}(u; v) = 1$  or si  $v$  divise  $u$ ,  $\text{PGCD}(u; v) = v$  donc  $v = 1$ .

3. si  $a^2 = b^3$ , d'après la question précédente  $v = 1$  donc en remplaçant dans  $b = dv$  et  $u^2 = dv^3$ , on obtient  $b = d$  et  $u^2 = d$  donc  $a = du = u^3$  et  $b = u^2$  donc  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Réciproquement :

Si  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier  $d$ , alors  $a = d^3$  et  $b = d^2$  donc  $a^2 = (d^3)^2 = d^6$  et  $b^3 = (d^2)^3 = d^6$  donc  $a^2 = b^3$ .

Conclusion :  $a^2 = b^3$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Montrer que si  $n$  est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors  $n \equiv 0 \pmod{7}$  ou  $n \equiv 1 \pmod{7}$ .

S'il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $n = a^2 = b^3$  alors d'après la question précédente il existe un entier  $d$  tel que  $a = d^3$  et  $b = k^2$  donc tel que  $n = d^6$ .

$d$	0	1	2	3	4	5	6
$d^6$	0	1	64	729	4 096	15 625	46 656
$d^6 \equiv \dots \pmod{7}$	0	1	1	1	1	1	1

donc  $n \equiv 0 \pmod{7}$  ou  $n \equiv 1 \pmod{7}$ .

*Remarque :* On peut également dire :

- si  $d = 0$ , alors  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ;
- si  $d = 1$ , alors  $n \equiv 1 \pmod{7}$ ;
- si  $d > 1$  et  $n$  multiple de 7, alors  $n \equiv 0 \pmod{7}$ ;

- si  $d > 1$  et  $d$  non multiple de 7, donc  $d$  premier, alors d'après le petit théorème de Fermat :  
 $d^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$  ou encore  $d^6 = n \equiv 1 \pmod{7}$ .

### Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère la surface  $S$  d'équation  $x^2 \times y^2 = z^3$ .

Pour tout réel  $\lambda$ , on note  $\mathcal{C}_\lambda$  la section de  $S$  par le plan d'équation  $z = \lambda$ .

1.  $\mathcal{C}_\lambda$  a pour équations :  $x^2 \times y^2 = \lambda^3$  et  $z = \lambda$ .

Si  $\lambda < 0$  il est impossible que  $x^2 \times y^2$  qui est positif ou nul, soit égal à  $\lambda$  donc  $\mathcal{C}_\lambda$  est le graphique 2.

Si  $\lambda = 0$  alors  $x^2 \times y^2 = 0 \iff x = 0$  ou  $y = 0$  donc  $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_0$  est le graphique 1,  $\mathcal{C}_\lambda$  est la réunion des deux axes dans le plan d'équation  $z = \lambda = 0$ .

Si  $\lambda > 0$  par élimination, le graphique 3 représente la courbe  $\mathcal{C}_\lambda$ .

Si  $\lambda > 0$ ,  $\mathcal{C}_\lambda$  est l'ensemble des points du plan d'équation  $z = \lambda$  tels que  $x^2 \times y^2 = \lambda^3$  ce qui se décompose en deux parties :  $xy = \sqrt{\lambda^3}$  et  $xy = -\sqrt{\lambda^3}$  soit  $y = \frac{\sqrt{\lambda^3}}{x}$  et  $y = -\frac{\sqrt{\lambda^3}}{x}$ .

$\mathcal{C}_\lambda$ , quand  $\lambda > 0$ , est donc la réunion de deux hyperboles équilatères.

2. a.  $\mathcal{C}_{25}$  a pour équations : soit  $y = \frac{\sqrt{25^3}}{x}$  soit  $y = -\frac{\sqrt{25^3}}{x}$  dans le plan d'équation  $z = 25$ .

Donc  $\mathcal{C}_{25}$  a pour équations : soit  $y = \frac{125}{x}$  soit  $y = -\frac{125}{x}$  dans le plan d'équation  $z = 25$ .

Si les coordonnées des points de  $\mathcal{C}_{25}$  sont des nombres entiers strictement positifs alors  $y > 0$  et  $\frac{125}{x}$  est un entier strictement positif donc  $x$  est un entier strictement positif qui divise 125, soit  $x = 1$  ou  $x = 5$  ou  $x = 25$  ou  $x = 125$ .

Les points cherchés ont donc pour coordonnées  $(1 ; 125 ; 25)$ ,

$(5 ; 25 ; 25)$ ,  $(25 ; 5 ; 25)$  et  $(125 ; 1 ; 25)$

- b.  $\mathcal{C}_{2010}$  a pour équations :  $(xy)^2 = z^3$  avec  $z = 2010$ .

D'après la question 3. a. :  $a^2 = b^3$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, avec ici  $a = xy$  et  $b = z$ ; or 2010 n'est pas le carré d'un nombre entier

(2010 = 2 × 3 × 5 × 67) donc l'équation  $(xy)^2 = 2010^3$  n'a pas de solutions entières.