Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 13 avril 2011

Exercice 1 **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

1. L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}_2$ au voisinage de 0 ; la fonction étant décroissante sur $]0~;~+\infty[$, la limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est $+\infty$.

2. De même la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est 0.

3. On ne peut pas savoir.

4. Sur $]0~;~1[$ la fonction différence est positive, s'annule en 1, puis est négative : c'est donc le troisième tableau.

Partie II

1. On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, d'où par somme de limites $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. f somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
   $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
   Chacun des termes est positif sur $]0~;~+\infty[$, donc la dérivée est positive sur cet intervalle, donc la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini.
3. On a de façon évidente $f(1) = \ln 1 + 1 - \dfrac{1}{1} = 0$. La fonction étant croissante sur $]0~;~+\infty[$, on a donc :
   - $f(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
   - $f(1) = 0$;
   - $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.
4. F somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = f(x)$.
   F est donc une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.
5. On vient de voir que $F'(x) = f(x)$ et d'après la question 5, $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle.

6. On a $F(1) = 1 \times 0 - 0 = 0$ et $F(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln\mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 \approx 1,7$.
   D'autre part $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,63$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e} - 1$.
   La fonction F est dérivable donc continue sur $[1 ; \mathrm{e}]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [0; \mathrm{e}]$ tel que $F(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
7. La calculatrice donne : $F(1,9)-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,05$ et $F(2,0)-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0,06$, donc : $1,9 < \alpha < 2,0$.

Partie III

1. L'ordonnée de A est égale à 0 ; il faut donc résoudre l'équation :
   $\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
   On a donc $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{-1} ; 0\right)$.
2. P étant commun aux deux courbes son abscisse vérifie :
   $g(x) = h(x) \iff \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \iff f(x) = 0$, d'après la partie II. Or dans cette partie on a vu que f s'annule en 1 et $g(1) = h(1) = 1$. Donc le point commun aux deux courbes est le point P(1 ; 1).
3. **a.** On a vu que sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}} ; 1\right]$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire que $g(x) \geqslant h(x)$ (la courbe $\mathscr{C}_h$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$), donc
   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} [h(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. On a vu qu'une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$, donc en particulier sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} ; 1\right]$ est $F(x) = x\ln(x) - \ln(x)$.
   On a donc :
   $\mathscr{A} = [-F(x)]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) =$

   $0 + \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \times (-\ln(\mathrm{e})) - (-\ln(\mathrm{e})) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. **a.** On a vu que sur $[1 ; +\infty[$, $h(x) \geqslant g(x)$, donc puisque $t \geqslant 1$, l'aire $\mathscr{B}_t$ est égale à :
   $\mathscr{B}_t = \displaystyle\int_1^t [h(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^t -f(x)\mathrm{dx} = -F(t)+F(1) = -F(t) = t\ln(t)-$ $\ln t$.

   b. On a vu que $\mathscr{B}_t = 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ou encore $t\ln(t) - \ln t = 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $F(t) = 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ équation qui a été résolue à la question 6 de la partie II et qui a pour solution $\alpha \approx 1,9$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

1. **a.** Soit I le milieu de [BD]. [CI] médiane du triangle équilatéral BCD est aussi hauteur issue de C. Donc (CI) ou (A′I) est perpendiculaire à (BD).

   De même [AI] médiane du triangle équilatéral ABD est aussi hauteur, donc (AI) est perpendiculaire à (BD).

   Or $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.

   De même avec J milieu de [BC], on montre que (AJ) est perpendiculaire à (BC) et (AA′) (ou (JA′)) est perpendiculaire à (BC).

   Donc $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$.

   b. La question précédente a montré que la droite (AA′) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (BCD) : (BD) et (BC) : elle est donc perpendiculaire à ce plan.

   Ceci démontre donc la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

2. On a $G = \text{bar.}\begin{array}{|c|c|c|c|}\text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D}\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\end{array}$ = (par associativité des trois derniers points) $\text{bar.}\begin{array}{|c|c|}\text{A} & \text{A}'\\ \hline 1 & 3\end{array}$ et par propriété du barycentre G appartient à la droite (AA′).

   On démontre de la même façon que G appartient aux trois autres médianes. Finalement les quatre médianes sont concourantes en G.

Partie II

1. On a $OP^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

   $OQ^2 = 4^2 + 2^2 + (-1)^2 = 16 + 4 + 1 = 21$.

   Donc la face OPQ n'est pas équilatérale et le tétraèdre n'est pas régulier.

2. On traduit la propriété vectorielle :

   $$\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{P'R} = \overrightarrow{0} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 - x + 4 - x - 2 - x & = & 0\\ 0 - y + 2 - y + 3 - y & = & 0\\ 0 - z - 1 - z + 0 - z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & 3x\\ 5 & = & 3y\\ -1 & = & 3z\end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{2}{3} & = & x\\ \frac{5}{3} & = & y\\ -\frac{1}{3} & = & z\end{array}\right.$$

   Donc $P'\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{5}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.

3. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (OQR) \iff ax + by + cz + d = 0$.

   Puisque $O(0\,;\,0\,;\,0) \in (OQR)$ on a $d = 0$.

   Écrivons que les coordonnées de Q et de R vérifient l'équation :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} Q(4\,;\,2\,;\,-1) \in (OQR) & \iff & 4a + 2b - c = 0\\ R(-2\,;\,3\,;\,0) \in (OQR) & \iff & -2a + 3b = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4a + 2b - c & = & 0\\ -4a + 6b & = & 0\end{array}\right.$$

   d'où par somme $8b - c = 0 \iff b = \dfrac{c}{8}$ puis en remplaçant dans la deuxième équation du départ : $2a = 3b = \dfrac{3c}{8} \iff a = \dfrac{3c}{16}$.

   On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (OQR) \iff \dfrac{3c}{8}x + \dfrac{c}{8}y + cz = 0$

$\iff \dfrac{3}{16}x+\dfrac{1}{8}y+z=0 \iff 3x+2y+16z=0.$

4. La droite (PP′) est la médiane relative à la face (OQR).
Cette droite a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{\text{PP}'}\left(\frac{2}{3}-1\ ;\ \frac{5}{3}-2\ ;\ -\frac{1}{3}-3\right)$ ou $\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{10}{3}\right)$ ou encore (1 ; 1 ; 10).
Or un vecteur normal au plan (OQR) est $\overrightarrow{n}$ (3 ; 2; 16) qui n'est pas colinéaire au vecteur $10\overrightarrow{\text{PP}'}$, ce qui signifie que la droite (PP′) n'est pas perpendiculaire au plan (OQR).
Conclusion : la propriété ($\mathscr{P}_1$) de la partie 1 n'est pas vraie dans un tétraèdre quelconque.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Les points de $\mathscr{E}_1$ ont des coordonnées qui vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& (x-y)^2\\ z&=&0\end{array}\right. \Rightarrow$
$(x-y)^2=0 \iff x-y=0$ qui est l'équation de la droite $y=x$ dans le plan $z=0$.
Les points de $\mathscr{E}_2$ ont des coordonnées qui vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& (x-y)^2\\ x&=&1\end{array}\right. \Rightarrow$
$z=(1-y)^2$ qui est l'équation d'une parabole $z=(1-y)^2$ dans le plan $x=1$.

Partie B

1. Les points de $\mathscr{E}_3$ ont des coordonnées qui vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& xy\\ z&=&0\end{array}\right. \Rightarrow$
$z=xy=0 \iff x=0 \quad \text{ou} \quad y=0$ qui sont les équations des axes de coordonnées dans le plan horizontal $z=0$.

2. Les points de $\mathscr{E}_3$ ont des coordonnées qui vérifient le système $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& xy\\ z&=&1\end{array}\right. \Rightarrow$
$xy=1 \iff y=\dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad x\neq 0$ qui est l'équation d'une hyperbole dans le plan horizontal $z=1$.

Partie C

1. Si $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{E}_5$ (avec $(x\ ;\ y\ ;z)\in\mathbb{N}^3$), alors $z=(x-y)^2=xy$.
Si son abscisse est nulle, alors $z=(0-y)^2=0y=0\Rightarrow y^2=0\Rightarrow y=0$.
Finalement $M(0\ ;\ 0\ ;0)$.

2. **a.** On a vu que les coordonnées d'un point de $\mathscr{E}_5$ vérifient
$z=(x-y)^2=xy$; en particulier
$(x-y)^2=xy \iff x^2+y^2-2xy=xy \iff x^2+y^2-3xy=0 \quad (1).$
Soit d le pgcd de x et de y ; on a $x=dx'$ et $y=dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.
En remplaçant dans l'égalité (1) :
$d^2x'^2+d^2y'^2-3dx'dy'=0 \iff x'^2+y'^2-3x'y'=0 \quad (2).$

b. L'égalité précédente s'écrit :
$3x'y' - x'^2 = y'^2 \iff x'(3y' - x') = y'^2$: cette dernière égalité montre que x' divise y'^2, mais les diviseurs premiers de y'^2 étant les mêmes que ceux de y', on en déduit que x' divise y'.

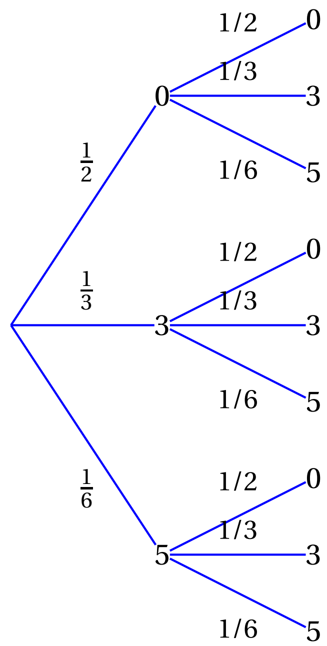
c. Comme x' et y' sont premiers entre eux la question précédente montre que $x' = 1$ soit en remplaçant dans l'égalité (2) : $1 + y'^2 - 3y' = 0$.

d. On a donc une équation du second degré ; $\Delta = 9-4 = 5$: les solutions sont donc $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ qui ne sont ni l'un ni l'autre des naturels.
Conclusion : l'hypothèse x est non nul est fausse et d'après la question 1. le seul point commun aux deux surfaces est l'origine.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On a donc $p_3 = 2p_5$ et $p_0 = 3p_5$, donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1 \iff 3p_5 + 2p_5 + p_5 = 1 \iff 6p_5 = 1 \iff p_5 = \dfrac{1}{6}$.
Il en résulte que $p_3 = 2p_5 = 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $p_0 = 3p_5 = 3 \times p_0 = 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Remarque : il ne devait pas être très difficile de voir que les probabilités étaient proportionnelles à l'aire des secteurs, donc à des angles au centre de 180 ° (deux angles droits), un angle de 60 ° et un angle de 120 ° pour un total de 360 °.
On a donc $p_0 = \dfrac{180}{360} = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}$ et $p_5 = \dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ ...

2. a.



On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6[e], 8[e] et 9[e] branche. Donc

$p\,(G_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{5}{36}$.

b. En déduire $p(P)$. On a $p(P) = 1 - p\,(G_2) - p\,(G_3) = 1 - \dfrac{5}{36} - \dfrac{7}{36} = \dfrac{36}{36} - \dfrac{12}{36} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$.

3. Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de gagner au moins une partie est $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = \dfrac{3^6 - 2^6}{3^6} = \dfrac{665}{729}$

4. **a.** On a le tableau de loi de probabilité de X suivant :

X	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{24}{36}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{5}{36}$

b. $\mathrm{E}(X) = -2 \times \dfrac{24}{36} + 1 \times \dfrac{7}{36} + 3 \times \dfrac{5}{36} = \dfrac{-48 + 7 + 15}{36} = -\dfrac{26}{36} = -\dfrac{13}{18} \approx -0,72$ €.

Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie.

Le jeu est défavorable au joueur.