BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 – sujet 0

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$

b. $f'(x) = (1 + 2x)\mathrm{e}^{x^2}$

c. $f'(x) = (1 + 2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

d. $f'(x) = (2 + x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0\,.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,; 0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,; 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,; 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.
On donne ci-contre la représentation graphique **de sa fonction dérivée** g'.

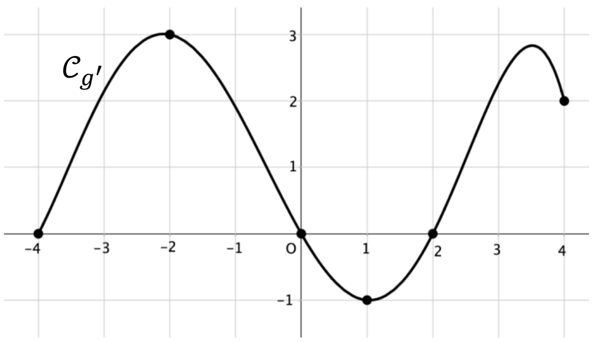
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

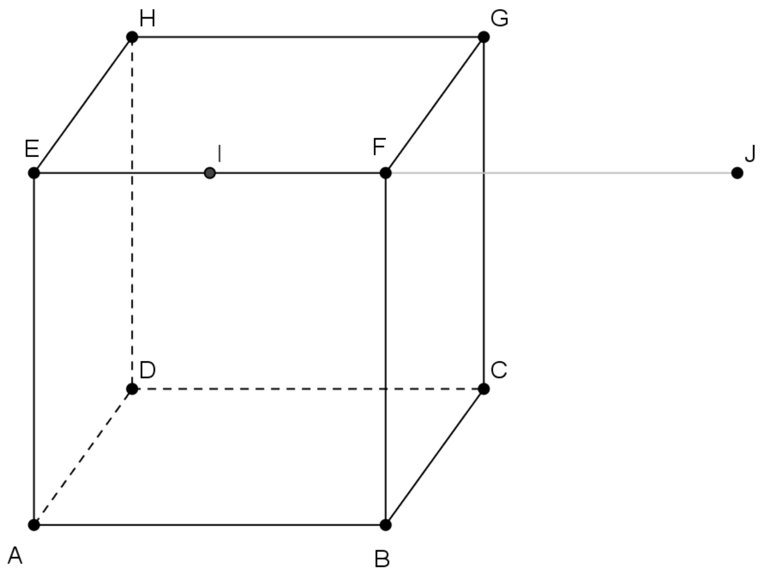
c. g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

b. En déduire l'aire du triangle BGI.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
On admet que la probabilité de l'événement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python **`seuil`** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande **`seuil(0.9)`** ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter ***un seul des deux exercices*** *A ou B.*

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

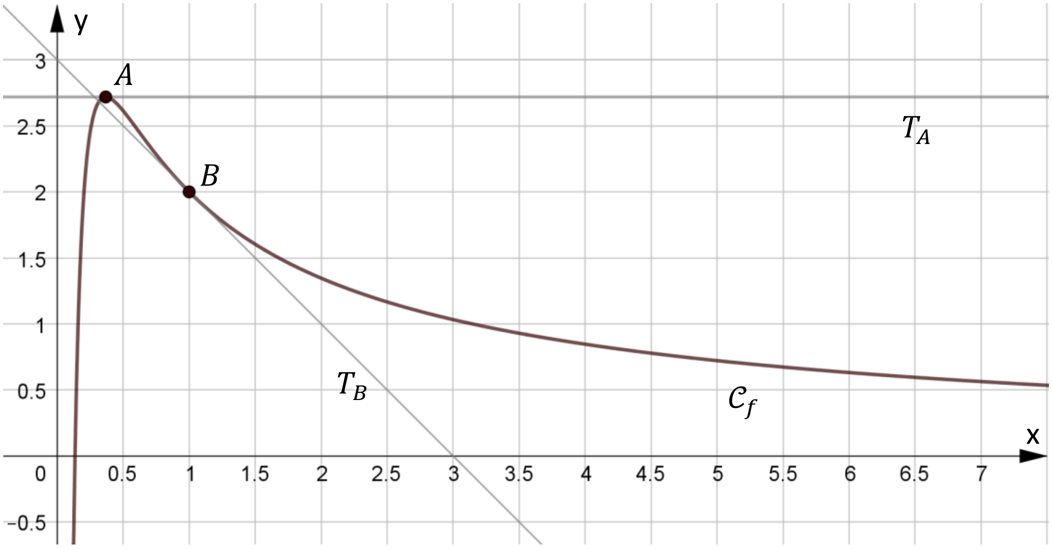
Exercice A (5 points)

Principaux domaines abordés
Logarithme
Dérivation, convexité, limites

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f

   On admet que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés
Équations différentielles
Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0{,}5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. **a.** Préciser la valeur de $f(0)$.
b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200\ \mathrm{e}^{-6t} + 25$.

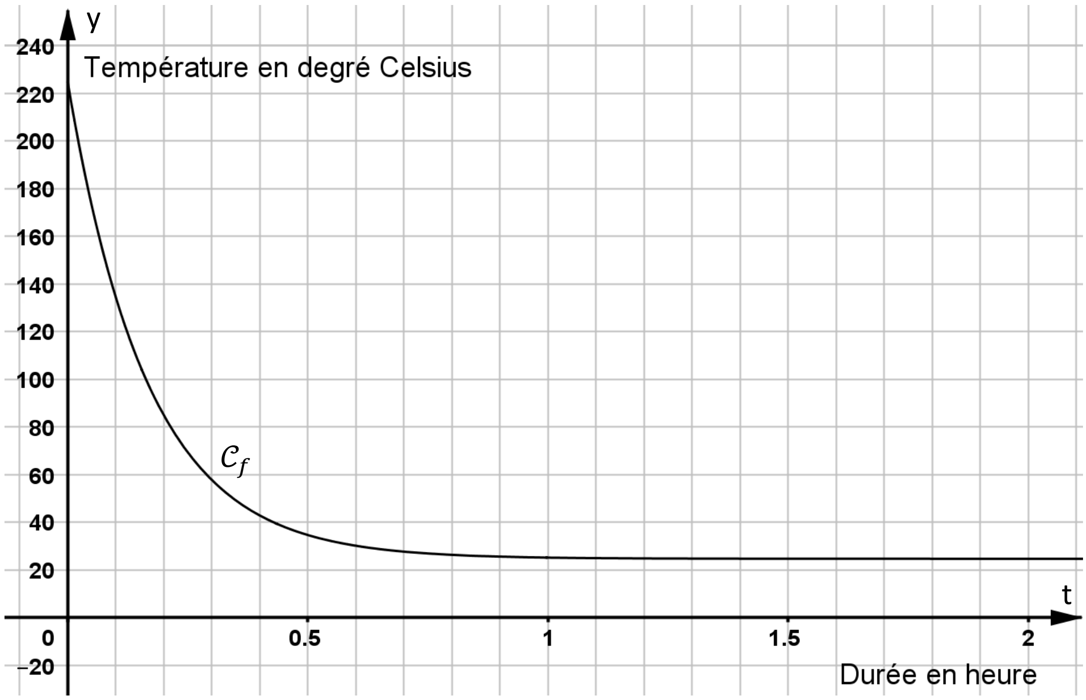
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;\ +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.
Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

a. Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}(1 - \mathrm{e}^{-0,1})$.

En déduire le sens de variation de la suite (D_n), puis la limite de la suite (D_n).

Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?