Corrigé du baccalauréat S Métropole 21 juin 2017

EXERCICE 1 — 7 points

commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout x, $h(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$; d'après les croissances comparées,

   $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$.

2. h est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.

   $h = u\mathrm{e}^w$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ w(x) = -x \end{cases}$.

   $h' = \left(u\mathrm{e}^w\right)' = u'\mathrm{e}^w + u\left(\mathrm{e}^w\right)' = u'\mathrm{e}^w + u \times w'\mathrm{e}^w$ avec $\begin{cases} u'(x) = \\ w'(x) = -1 \end{cases}$.

   On en déduit : $h'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\mathrm{e}^{-x}$ donc, après factorisation par e^{-x} : $\boxed{h'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

   Pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$; $h'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et
   $h'(x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1$.

   $h(0) = 0$ et $h(1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx 0,37$	0

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

   a. Pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} - h'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = h(x)$ donc

   $$\boxed{h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)}$$

   b. Soit la fonction $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$; $v(x) = -(-1)\mathrm{e}^{-x} = -w'(x)\mathrm{e}^{w(w)}$ (avec les notations précédentes) ; une primitive de v est

   $$\boxed{V : x \longmapsto -\mathrm{e}^{w(x)} = -\mathrm{e}^{-x}}$$

   c. Soit H une primitive de h.
   $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$ donc $H(x) = -\mathrm{e}^{-x} - h(x)$ d'où $\boxed{H(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}}$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

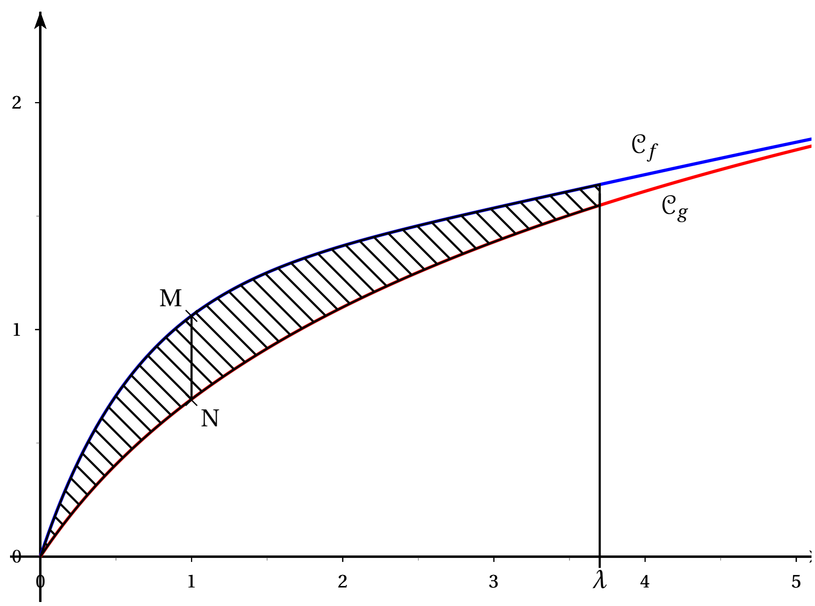
$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1)$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

a. M et N ont la même abscisse et $f(x) \geqslant g(x)$ (car $x+1 \geqslant 1$ donc $\ln(x+1) \geqslant 0$).
D'où $MN = f(x) - g(x) = x\text{e}^{-x} = h(x)$: $\boxed{\text{MN} = h(x) = x\text{e}^{-x}}$.

b. D'après l'étude des variations de h, MN est maximum pour $x = 1$.



2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a. Hachurons le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique. (voir ci-dessus)

b. $A_\lambda = \displaystyle\int_0^\lambda (f(x) - h(x))\,\text{d}x = \int_0^1 h(x) = H(\lambda) - H(0) = -(\lambda+1)\text{e}^{-\lambda} - (-1)$
$= 1 - (\lambda+1)\text{e}^{-\lambda} = 1 - \dfrac{\lambda+1}{\text{e}^\lambda}$:

$$\boxed{A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda+1}{\text{e}^\lambda}}.$$

c. $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{\text{e}^\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$.
$\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{\text{e}^\lambda}\right) = 0$ (croissances comparées).
Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 1}$.
L'aire entre les deux courbes (pour $0 \leqslant x$) vaut 1.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1-\dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}}<S$ faire
	λ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. À la calculatrice, on obtient :

λ	$1-\dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}}$
0	0
1	0,264241118
2	0,59399415
3	0,800851727

L'algorithme affichera donc 3.

b. L'algorithme calcule la plus petite valeur entière de λ pour laquelle $A_{\lambda}>S$.

EXERCICE 2 — 3 points

commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x-z-3=0$.
On note A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ où a est un nombre réel.

1. $2x_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}-3=2-a^2-3=-1-a^2<0$ donc A n'appartient pas à $\mathcal{P}$ (puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de $\mathcal{P}$).

2. a. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$; c'est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

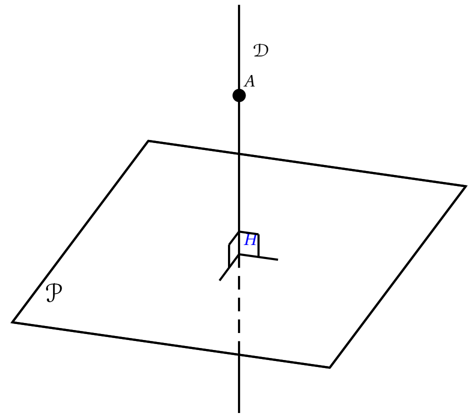
$\mathcal{D}$ passe par A donc une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=1+2t\\y=a\\z=a^2-t\end{array}\right.\quad,\ t\in\mathbb{R}}$$

b. Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}2t\\0\\-t\end{pmatrix}$; on en déduit que $\mathrm{AM}=\sqrt{(2t)^2+(-t)^2}=\sqrt{5t^2}=|t|\sqrt{5}$; $\boxed{\mathrm{AM}=|t|\sqrt{5}}$

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



3. H appartient à la droite $\mathcal{D}$ et au plan $\mathcal{P}$.
H est associé à un nombre t_{H}, solution du système :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \\ 2 + 4t - a^2 + t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = a \\ z = a^2 \\ t = \dfrac{a^2+1}{5} \end{cases}.$$

H est donc associé à la valeur $t_{\text{H}} = \dfrac{a^2+1}{5}$.

On a alors : $AH = |t_{\text{H}}|\sqrt{5} = \boxed{\dfrac{a^2+1}{\sqrt{5}}}$.

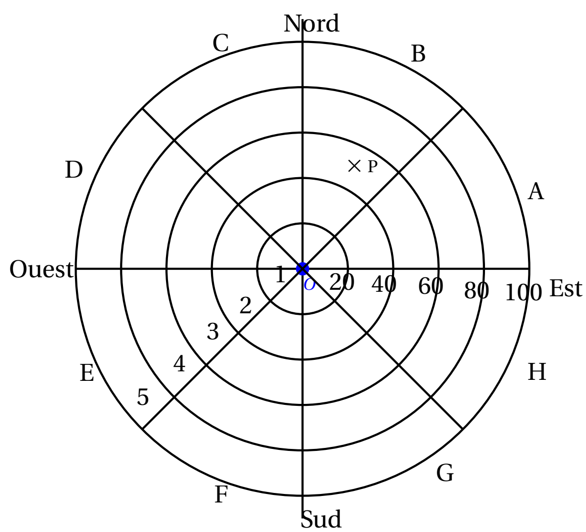
$a \mapsto a^2 + 1$ admet un minimum pour $a = 0$ donc la distance de A au plan $\mathcal{P}$ est minimum pour $a = 0$ et vaut alors $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

EXERCICE 3 5 points

Commun à tous les candidats

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentrique correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_{P} l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_{P} et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
   $r = z_P$; d'après le dessin, $40 < r < 60$.
   $\theta = \arg(z_{\text{P}})$; P est dans le secteur B, donc $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   La réponse est la proposition C.

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. Si $z = 70\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, son module est $r = 70$ et un argument est $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{L'impact de foudre appartient donc au secteur G4}}$.

b. $z = -45\sqrt{3} + 45\mathrm{i} = 90\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 90\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

$|z| = 90$ et $\theta = \arg(z) = \dfrac{5\pi}{6} \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$.

$\boxed{\text{L'impact de foudre est dans le secteur D5}}$

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.
Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}3$, l'affixe Z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\dfrac{\pi}{3}$ et d'écart type $\dfrac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire que, quels que soient les intervalles I et J, les évènements $(M \in 1)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.
Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. $P(M < 0) = P(M < 50) - P(0 \leqslant M \leqslant 50) = 0,5 - P(0 \leqslant M \leqslant 50) \approx 0$ (calculé à la calculatrice). $\boxed{P(M < 0) \approx 0}$
On retrouve le fait qu'il est impossible que le module du nombre complexe z soit strictement négatif.

2. $P(40 \leqslant M \leqslant 60) = P(\mu - 2\sigma \leqslant M \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$; $\boxed{P(40 \leqslant M \leqslant 60) =\approx 0,954}$

3. On admet que $P\left(T \in \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right) = 0,819$. La probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3 est $P\left((40 \leqslant M \leqslant 60) \cap \left(T \in \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right)\right) = P(4ř \leqslant M \leqslant 60) \times P$ $\left(T \in \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ (car les évènements sont indépendants d'après l'énoncé)
$= 0,954 \times 0,819 = 0.781326 \approx 0,781$: $\boxed{P(P \in \text{B3}) \approx 0,781}$

EXERCICE 4 — 5 points

pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

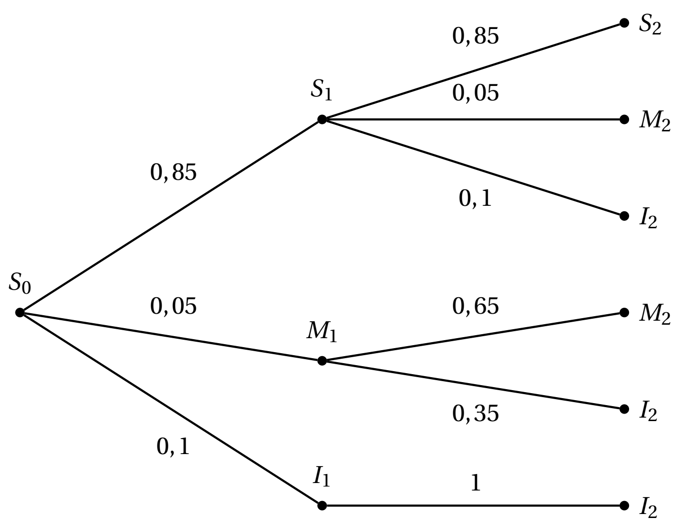
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1\ ;\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. $I_2 = (S_1 \cap I_2) \cup (M_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_2)$ (réunion d'évènements incompatibles).
D'où : $P(I_2) = P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1)$ (formule des probabilités totales).
Donc : $P(I_2) = 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1 = 0,085 + 0,0175 + 0,1 = 0,2025$;
$\boxed{P(I_2) = 0{,}2025}$.

3. $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{p(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0,05 \times 0,35}{0,2025} = \dfrac{0,00175}{0,2025} \approx 0,086$; $\boxed{P_{I_2}(M_1) \approx 0,086}$

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. L'univers Ω est la réunion des évènements disjoints S_n, M_n et I_n donc $u_n + v_n + w_n = P(\Omega) = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
…	…	…	…	
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Dans la cellule C3, il faut taper la formule

« =0.65*C2+0.05*B2 ».

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique fg : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

On voit que la valeur maximale de v_n est obtenue pour $n = 4$ et vaut environ 0,085 9.

3. a. D'après l'énoncé, $P(S_{n+1}) = 0,85P(S_n)$ dnonc $\boxed{u_{n+1} = 0,85u_n}$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,85$.

On en déduit que $u_n = u_0q^n$ donc $\boxed{u_n = 0,85^n}$ pour tout n

b. Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

- **Initialisation** : $0,85^0 - 0,65^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $v_n = 0,85^n - 0,65^n$.

Alors : $0,05u_n + 0,65v_n = 0,05 \times 0,85^n + 0,65 \times \dfrac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right)$
$= \left(0,05 + \dfrac{0,65}{4}\right) \times 0,85^n - \dfrac{1}{4} \times 0,65^{n+1} = \dfrac{0,85}{4} \times 0,85^{n+1} - \dfrac{0,65^{n+1}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right) = v_{n+1}$.
La propriété est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propruété est vraie pour tout n

4. $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 0}$.

Comme $u_n + v_n + w_n = 1$, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = 1}$.

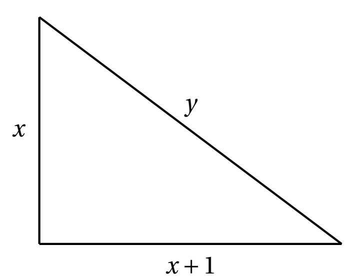
Interprétation : cela signifie donc que sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés.

EXERCICE IV

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l 'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPJ, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. D'après le théorème de Pythagore, un couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si, et seulement si, $y^2 = x^2+(x+1)^2 = x^2+x^2+2x+1 \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2x^2 + 2x + 1}$

2.
- Pour $x = 1$, $x+1 = 2$ et on aurait $y^2 = 1+4 = 5$ qui n'est pas le carré d'un entier.
- Pour $x = 2$, $x+1 = 3$ et on aurait $y^2 = 4+9 = 13$ qui n'est pas le carré d'un entier.
- Pour $x = 3$, $x+1 = 4$ et on aurait $y^2 = 9+16 = 25$ qui est le carré d'un entier, donc $y = 5$.

Le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par $\boxed{(3\ ;\ 5)}$

3. **a.** On peut raisonner par contraposée : si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, donc $n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2\left(p^2\right)$ donc n^2 est pair.
On a montré que si n est pair, alors n^2 est pair, ce qui équivaut à montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

b. On suppose que $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI ;
alors $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x^2 + x\right) = 1$ qui est un nombre impair (de la forme $2q+1$ avec q entier). y est bien un **nombre impair**.

c. Soit $(x\ ;\ y)$ un couple d'entiers définissant un TRPI.
Alors : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2x_2^2x = 1 \Leftrightarrow x \times (-2x-2) + y \times y = 1$.

Il existe donc deux entiers relatifs u et v avec $\begin{cases} u = -2x-1 \\ v = y \end{cases}$ tels que $ux + vy = 1$.

D'après le théorème de Bézout, x et y sont **premiers entre eux**.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+1 \\ 4x+3y+2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x' = 3x+2y+1 \\ y' = 4x+3y+2 \end{cases}$

1. $y'^2 - 2x'\left(x'+1\right) = \left(4x+3y+2\right)^2 - 2\left(3x+2y+1\right)\left(3x+2y+2\right)$
$= 16x^2+9y^2+4+24xy+16x+12y-2\left[9x^2+6xy+6x+6xy+4y^2+4y+3x+2y+2\right]$
$= 16x^2+9y^2+4+24xy+16x+12y-18x^2-12xy-12x-12xy-8y^2-8y-6x-4y-4$
$= -2x^2+y^2-2x = y^2-2x(x+1)$ donc

$$\boxed{y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)}$$

2. On suppose que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, donc $y^2 = 2x(x+1)+1$.
Alors $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1) = 1$ donc $y'^2 - 2x'(x'+1) = 1$ d'où $y'^2 = 2x'\left(x'+1\right)+1$ donc $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définit un TRPI.
On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ définit un TRPI.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$ qui définit un TRPI (déjà vu)
- **Hérédité** : On suppose que $\begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ définit un TRPI.
  $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix} + B \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$
  On a montré précédemment que si $\begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ définit un TRPI, alors $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \end{pmatrix}$ définit aussi un TRPI.
  La propriété est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

3. On part du couple $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$ qui correspond à la matrice $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On calcule alors successivement $AX + B$ jusqu'à obtenir une matrice X dont les termes sont supérieurs à 2017.

On trouve : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 985 \end{pmatrix}$; $\boxed{\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,059 \\ 5\,741 \end{pmatrix}}$