

A

Série : A

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 02 heures 15 minutes

Code matière : 009

Coefficients : A1 = 1 ; A2 = 3

~~~~~

**NB** : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.  
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

**Exercice 1 : (5 pts)**

1- On considère la suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n - 1 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .

(1 pt)

2- Etant donnée la suite géométrique  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes positifs, de premier terme  $V_0$ , de raison  $q = \frac{3}{4}$

et tel que  $V_3 = \frac{27}{8}$ .

a- Justifier que  $V_0 = 8$ .

(1 pt)

b- Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .

(1 pt)

c- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n + 3)$ .

(0,5 pt)

3- Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de terme général  $W_n = \ln \left( 8 \times \left( \frac{3}{4} \right)^n \right)$  et de premier terme  $W_0 = \ln 8$ .

Déterminer, en fonction de  $\ln 2$  et de  $\ln 3$ , la somme :  $S = W_0 + W_1 + \dots + W_5$ .

(1,5 pt)

**Exercice 2 : (5 pts)**

Une urne contient 11 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 11 et de couleur uniforme rouge ou blanche. On sait qu'il y a :

- 3 boules rouges portant chacune un numéro pair.
- 7 boules blanches dont 5 portent chacune un numéro impair.

1- Après avoir reproduit le tableau ci-dessous, complétez-le :

(1 pt)

| Boules       | PORTANT NUMERO PAIR | PORTANT NUMERO IMPAIR | TOTAL |
|--------------|---------------------|-----------------------|-------|
| Rouges       | 3                   |                       |       |
| Blanches     |                     | 5                     | 7     |
| <b>TOTAL</b> |                     |                       | 11    |

2- Un enfant tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules portant chacune un numéro impair ».

(1 pt)

B : « Obtenir deux boules rouges et portant chacune un numéro pair ».

(1 pt)

3- Le contenu de l'urne reste inchangé. L'enfant tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C : « Avoir **exactement et successivement** deux boules rouges ».

(1 pt)

D : « Avoir deux boules blanches portant chacune un numéro impair **et deux seulement** ».

(1 pt)

**NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.**

A<sub>1</sub> ; A<sub>2</sub>

**PROBLEME (10 pts)**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ . On note par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

- |       |                                                                                                                                                                                              |             |           |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----------|
| 1) a) | Vérifier que, pour tout $x \geq 0$ , $f(x) = 4\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right)$ .                                                                                                          | (1 pt) ;    | (0,5 pt)  |
| b)    | En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .                                                                                                                                             | (0,75 pt) ; | (0,5 pt)  |
| c)    | Interpréter graphiquement ce résultat.                                                                                                                                                       | (0,5 pt) ;  | (0,25 pt) |
| 2) a) | Prouver que, pour tout $x \geq 0$ , $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée première de $f$ .                                                                 | (1 pt) ;    | (1 pt)    |
| b)    | Après avoir étudié le sens de variation de $f$ , dresser son tableau de variation.                                                                                                           | (1,5 pt) ;  | (1 pt)    |
| 3) a) | Calculer à $10^{-2}$ près : $f(0)$ ; $f(1)$ ; $f(2)$ .                                                                                                                                       | (0,75 pt) ; | (0,75 pt) |
| b)    | Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$ .                                                                                                       | (1 pt) ;    | (1 pt)    |
| 4)    | Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ , avec son asymptote, dans un même repère.                                                                                                                     | (1,5 pt) ;  | (1,5 pt)  |
| 5)    | Soit $F$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 4 \ln(e^x + 1)$ .                                                                                                                |             |           |
| a)    | On rappelle que $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$ . Démontrer que $F$ est une primitive de $f$ .                                                                                                     | (1 pt) ;    | (0,5 pt)  |
| b)    | En déduire, en $cm^2$ et à $10^{-2}$ près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par : la courbe $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ . | (1 pt) ;    | (1 pt)    |
- On donne :  $e \approx 2,7$  ;  $e^2 \approx 7,38$  ;  $\ln(e^2 + 1) \approx 2,12$  ;  $\ln 2 \approx 0,7$

**POUR A<sub>2</sub> SEULEMENT**

- 6) Soit  $G$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ . On note par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.
- a) Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $G(-x) + G(x) = 4$ . Que signifie ce résultat pour la courbe  $(\Gamma)$  ? (1 pt)
- b) Tracer, à partir de la courbe  $(\mathcal{C})$ , la courbe  $(\Gamma)$  dans le même repère. (1 pt)

