grandprof.net

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit l'application f de $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ définie par :

$$f(z)=\frac{z-4}{z-2i}$$

a) Calculer les nombres complexes suivants : $f(0)$; $f(-2)$; $f(1-i)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=2+i$.

c) On pose $z=x+iy$ et $f(z)=X+iY$ avec x,y,X,Y réels.
Calculer X et Y en fonction de x et y.

d) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel ?

e) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)|=1$?

EXERCICE 2:

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct, $(O;\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A, B et C d'affixes respectives $a=2-2i\sqrt{3}$, $b=2+2i\sqrt{3}, c=8$.

1. Calculer le module et l'argument de a. Placer les points A, B et C
2. a) Calculer le nombre complexe $Z=\frac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer le barycentre G des points pondérés $(A,1)$; $(B,1)$ et $(C,2)$. Placer G.
4. Déterminer et construire l'ensemble (γ) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$$

EXERCICE 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $z_A=3+2i$, $z_B=-3$ et $z_I=1-2i$.
   Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.
   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?
   b) Calculer l'affixe z_c du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   c) Soit D le barycentre du système {(A ; 1),(B ; -1),(C ; 1)} , calculer l'affixe z_D du point D.
   Montrer que ABCD est un carré.

grandprof.net

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

   a) Montrer que B appartient à Γ_2.
   b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

EXERCICE 4 :

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$
   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive .
2. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
3. Donner la valeur exacte de $(z')^{2014}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.
   a) Que peut on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?
   b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   c) Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égal à $3\sqrt{3} - i$.
   La conjecture émise à la question a. est-elle vraie ?

EXERCICE 5 :

Soit P le polynôme à variable complexe défini par : $P(z) = z^3 + 2iz^2 - 2iz + 4$.

1. a) Déterminer le réel α pour que le nombre complexe αi soit solution de $P(z) = 0$.
   b) Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - i\alpha)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes à déterminer.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $P(z) = 0$.

grandprof.net

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_1 = -2i, z_2 = 1+i$ et $z_3 = -1-i$. On pose $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$
   a) Donner la forme trigonométrique de Z.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit S la similitude directe de centre C transformant B en A.
   Déterminer la forme complexe de S et donner ses éléments caractéristiques.
   Construire l'image du triangle ABC par la similitude S.

EXERCICE 6

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1+i, b = -1-i$, $c = 2i$ et $d = 2-2i$.
   a) Placer les points A, B, C et D.
   b) Calculer les nombres complexes $\frac{c-a}{d-a}$ et $\frac{c-b}{d-b}$
   En déduire la nature des triangles ACD et BCD
   c) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[CD]$
   d) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M(z) tel\ que\ |z-i| = |1+2i|\}$
   Montrer que $\Gamma\ passe\ par\ A$, construire alors Γ.
3. Soit $= H \circ R$, avec H l'homothétie de centre I de rapport $\sqrt{2}$, et R la rotation de centre I d'angle $\frac{\pi}{4}$
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S
   b) Donner la forme complexe de H, de R, et enfin de S.
   c) Déterminer et construire l'image de Γ par S.

EXERCICE 7 :

Dans le plan P on considère le triangle équilatéral ABC.
On pose $AB = BC = CA = a, a > 0$.

1. Construire le point G barycentre du système {(A, 2), (B, 1), (C, 1)}
2. Déterminer et construire chacun des deux ensembles suivants :
   $E_1 = \{M \in P\ /\ 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2\}$
   $E_2 = \left\{M \in P\ /\ 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}\right\}$
   Pour déterminer ce dernier ensemble, on pourra utiliser le point G puis le milieu I du segment [AG].