EXERCICE 8 :

1. z étant un nombre complexe, on pose :
$$A = \frac{1+z}{1-z}$$
On désigne par M un point du plan dont l'affixe est z.
   a) Déterminer l'ensemble des points M tel que A soit un nombre réel.
   b) Déterminer l'ensemble des points M tel que A soit imaginaire pur.
2. Le nombre complexe u s'écrit :
$$u = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$$
Ecrire u sous forme trigonométrique. Calculer u^4.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$6z^2 - (5-i)z + 2 - \frac{5}{6}i = 0.$$
4. Calculer la somme suivante :
$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$$

EXERCICE 9 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes : $z^2 - z + 1 = 0$
$z^2 - 4z + 1 = 0$
2. A l'aide des résultats du 1., on se propose maintenant de résoudre l'équation:
$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0 \; (E)$$
   a) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
   b) Soit (E') l'équation :
$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$$
   Montrer que (E) et (E') ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$.
   c) On pose $u = z + \frac{1}{z}$; calculer $z^2 + \frac{1}{z^2}$ en fonction de u.
   d) Montrer que u est solution de l'équation : $u^2 - 5u + 4 = 0$
   e) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

EXERCICE 10 :

Le plan complexe $\wp$ est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE A.

1. Calculer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^2$.
2. Soit le point A d'affixe $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et le point B d'affixe $z_B = -z_A$
   a) Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
   b) Placer A et B sur la figure.

3. On désigne par C, l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Placer les points C et D sur la figure de la question A.2.b.
   b) Calculer l'affixe z_C du point C sous forme algébrique. On donnera le détail du calcul.
   c) Exprimer l'affixe z_D du point D en fonction de z_C et de z_A. Justifier que $z_D = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

PARTIE B

Soient les points A et B d'affixe $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_B = -z_A$ définis dans la partie A. et le point E d'affixe $z_E = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
Pour tout réel m non nul, on considère le point G_m barycentre du système :

$$\{(A\,;m)\,;\,(B\,;-2)\,;\,(E\,;2)\}$$

1. Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{BE}$
2. Dans cette question, $m = -4$.
   Soit ξ l'ensemble des points M du plan $\wp$ qui vérifient :
   $$\left\|-4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}\right\| = 4\sqrt{2}$$
   a) En utilisant la question B.1. ,écrire la relation existant entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_{-4}}$ et $\overrightarrow{BE}$
   Placer G_{-4} sur la figure de la question A.2.b.
   b) Montrer que A appartient à ξ .
   c) Quel est l'ensemble ξ ?
   Construire ξ sur la figure de la question A.2.b.
3. Dans cette question, on considère $m = 2$.
   Soit $\Im$ l'ensemble des points M du plan $\wp$ qui vérifient :
   $$(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}).\overrightarrow{DA} = -16$$
   où D est le point d'affixe $z_D = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$, défini à la question A.3.c.
   a) En utilisant la question B.1., écrire la relation existant entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_2}$ et $\overrightarrow{BE}$. Déterminer alors G_2.
   b) On montre que M est un point de $\Im$ si et seulement si on a :
   $$\overrightarrow{MG_2}.\overrightarrow{DA} = a$$
   où a un réel. Préciser le réel a.
   c) Montrer que A appartient à $\Im$.
   d) On en déduit que M est un point de $\Im$ si et seulement si :
   $$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} = b \quad et \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA} = c$$
   où b et c sont des réels. Préciser les réels b et c.
   Dans ce cas que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DA}$?
   e) Quel est l'ensemble $\Im$? Le tracer sur la figure de la question A.2.b.