EXERCICES

EXERCICE 1 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

1. Déterminer son domaine de définition, puis étudier ses variations.
2. f est-elle dérivable à droite en $x_0 = -1$?
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
4. Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur une partie de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
   Tracer la courbe représentative de f^{-1} sur le graphique précédent.
5. Calculer l'expression de $f^{-1}(x)$.
   La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $x_0 = -1$?
6. Calculer $(f^{-1})'(x)$
   a) en utilisant l'expression de $f^{-1}(x)$ calculée précédemment
   b) en utilisant le théorème sur la dérivée de la bijection réciproque.

EXERCICE 2 :

1. On considère la fonction :
$$\varphi : [0;\pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \varphi(x) = 1 + 4\cos x$$
   Démontrer que l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0;\pi]$, comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (on ne cherchera pas à calculer α)
2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$
3. Par considération de parité et de périodicité de f, montrer que l'on peut réduire son ensemble d'étude à $[0;\pi]$
4. Etudier les variations de f.
5. Tracer sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé. Préciser ses extrema et ses points d'intersection avec les axes de coordonnées.

EXERCICE 3 :

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée et étudier le signe de $f'(x)$:

a) $f(x) = x\ln x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\ln x)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ e) $f(x) = e^x \ln x$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

g) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ h) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$