EXERCICE 3 :

Les deux parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A :

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln(x+1)^2 \; si \; x \leq 0 \\ (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \; si \; x > 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1cm).

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de Df.
2. a) Etudier la continuité de f en O.
   b) Montrer que f est dérivable à gauche en O et déterminer $f'_g(0)$.
   c) Calculer $\lim\limits_{u \to +\infty} (1+u)e^{-u}$. En déduire que f est dérivable à droite en O et déterminer $f'_d(0)$.
   d) Déterminer la tangente éventuelle ou les demi - tangentes à la courbe (C) au point d'abscisse O par son (ou ses) équation (s).
3. Etudier les variations de f sur Df et dresser son tableau de variation.
4. On défini sur $[0; +\infty[$ la fonction φ par : $\varphi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$.
   a) Calculer la dérivée φ' de φ et prouver que : pour tout réel t positif, on a $0 \leq \varphi'(t) \leq t$.
   b) En déduire que pour tout u positif, on a $0 \leq \varphi'(u) \leq \frac{u^2}{2}$ (I)
5. a) Etablir, à l'aide des inégalités (I), que pour tout réel x strictement positif, on a $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$.
   b) En déduire que (C) admet une asymptote (Δ) au voisinage de $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).
6. a) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.
   b) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C) et de (Δ), différent de O.
   c) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) au voisinage de $-\infty$.
7. Tracer la courbe (C) avec ses asymptotes et ses tangentes ou demi-tangentes particulières.
8. Hachurer le domaine plan limité par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = -e - 1$ et $x = -2$; calculer en cm^2 son aire géométrique A.

Partie B :

A. On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction g par : $g(x) = (1+x)e^{-2x} - 1$

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution non nulle unique α et que : $-1 < \alpha < -\frac{3}{4}$

B. Soit la fonction Ψ définie sur $I = \left[-1; \frac{3}{4}\right]$ par : $\psi(x) = e^{2x} - 1$

1. Vérifier que $\psi(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que $(\forall x \in I)$, $\Psi(x) \in I$ et que $|\Psi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

C. On donne la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = e^{2u_n} - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $-1 \leq u_n \leq -\frac{3}{4}$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

et que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

c) En déduire la convergence de la suite (u_n)

EXERCICE 4 :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction numérique f_n définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille de fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé d'unité 2cm.

Partie I :

1. Soit h_n la fonction numérique définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

Etudier le sens de variation de h_n.

En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de $h_n(x)$ sur $]-1; +\infty[$.

2. a) Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, vérifier que $f_1'(x) = h_1(x)$ et que, pour tout $n > 1$; $f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$

b) On suppose n impair. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.

Donner alors le tableau de variation de la fonction f_n lorsque n est impair, en précisant ses limites en $+\infty$.

c) On suppose n pair. Dresser de même le tableau de variation de f_n, lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. a) Etudier la position relative des courbes C_1 et C_2

b) Tracer ces deux courbes.

Partie II :

Dans cette partie U désigne la suite de terme général U_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$$

1. a) Démontrer que :

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

a) En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

b) A l'aide de l'encadrement obtenu en a) déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$0 \leq U_{n_0} \leq \frac{1}{100}$$

2. a) En remarquant que, pour tout $x \in [0\,;1]$ on a :

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

Calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

b) Calculer U_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Pour tout $x \in [0\,;1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x \quad (1)$$

a) Démontrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad (2)$$

b) En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$, établir l'égalité :

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$$

c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

4. Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } f_2(x) \leq y \leq f_1(x).$$

Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm²