EXERCICE 5 :

A. On considère la fonction f_n définie sur ℝ par $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

1. Etudier le signe de f'_n. En déduire le tableau de variation de f_n. On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
2. Montrer que la courbe C_n, représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation. Tracer C_2.
3. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n.

B. On se propose dans cette partie de montrer que la suite $(x_n)\ n \geq 2$ admet une limite l et de calculer l. A cet effet on cherche à réaliser un encadrement de x_n.

1. On considère la fonction φ définie sur $]1; +\infty[$ par :
$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\frac{x-1}{x+1}$$
   a) Déterminer le signe de φ'. En déduire le signe de φ
   b) Montrer que $\varphi(n) < 0$
   c) En déduire que $x_n > -2$.
2. a) Etablir l'égalité
$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} + \ln\frac{n}{n+1}\right]$$
   b) On considère la fonction ψ définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\frac{x}{x+1}$$
   Etudier le signe de ψ'. En déduire le signe de ψ, puis celui de :
$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)$$
   c) Montrer que :
$$x_n < 2n\ln\frac{n}{n+1}$$
3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)$. On pourra poser $u = \frac{1}{n}$.
   b) En déduire l'existence et la valeur de l.

EXERCICE 6 :

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par
$$g(x) = 2x - 1 + \ln\frac{x}{x+1}$$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

1. Calculer les limites de g aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$

2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que la courbe (C) admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$
4. Etudier la position relative de la courbe (C) et Δ
5. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$
6. Construire (C) et Δ

Partie B

A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'aire en cm² du domaine plan limité par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$

Partie C

On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = g(n) - 2n + 1$ pour $n > 0$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n), et, pour tout entier n, le signe de u_n.
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
3. On pose $T_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$
   Calculer T_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

PROBABILITE

EXERCICE 1 :

A. On lance six fois de suite un dé en notant à chaque fois le numéro de la face supérieure. On appelle « résultat » une suite de six numéros ainsi obtenus.
   1. Combien de résultats peut-on obtenir ?
   2. Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros sont supérieurs ou égaux à 4 ?
   3. Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros sont pairs ?
   4. Combien peut-on obtenir de résultats où ne figure pas le numéro 1 ?
   5. Combien peut-on obtenir de résultats où figure au moins une fois le numéro 1 ?

B. Une urne contient 20 boules : 8 vertes, 7 rouges et 5 bleues.
   1. On extrait simultanément 3 boules au hasard. Calculer le nombre de façons :
      possibles de faire le tirage
      pour que toutes les 3 soient de couleurs différentes
      pour que les 3 soient de la même couleur
      pour qu'il y ait au moins une rouge et une bleue.
   2. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne. Reprendre les questions précédentes.

3. On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne. Reprendre les mêmes questions.

EXERCICE 2 :

Soit un dé cubique dont les faces sont numérotées 0, 1, 1, 2, 3, 3.
Soit un deuxième dé cubique tel qu'une face porte le n°0 ; un nombre n de faces portent le n°1 (n entier tel que $1 \leq n \leq 4$). Les faces restantes portent le n° 2.
Les deux dés sont lancés simultanément et on suppose qu'on est sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

On note :

- l'évènement «chaque dé porte le numéro 1 »
- l'évènement « la somme des points marqués est égale à 4 »
- l'évènement « la somme des points marqués est égale à 1 ».

1. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
2. Calculer P(B). Quelle valeur faut-il donner à n pour que $P(B) = \frac{2}{9}$?

Dans la suite de l'exercice on prend $n = 2$.

3. Calculer la probabilité des évènements B et C.
4. On lance les deux dés précédents quatre fois : ces lancers successifs sont supposés indépendants
   Le joueur gagne 1 point lorsque l'évènement C est réalisé sinon il ne gagne rien. On note Y la variable aléatoire égale au total de points lors des 4 lancers
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y
      Calculer l'espérance mathématique de Y et sa variance.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement :
      D « C est réalisé trois fois exactement »

EXERCICE 3 :

On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

A. Le jeu se déroule de la façon suivante : un joueur tire simultanément trois boules.
   1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
      A : le joueur a tiré exactement une boule noire.
      B : le joueur a tiré exactement deux boules noires.
      C : le joueur a tiré exactement trois boules noires.
   2. Le joueur gagne 5 Francs pour chaque boule noire obtenue.
      On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme gagnée.
      Etablir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

B. Le jeu se déroule maintenant de la façon suivante :
Le contenu de l'urne est inchangé.
Le joueur tire une boule :
Si elle est noire il gagne 5 F et la partie est terminée.
Si elle est rouge il la remet dans l'urne et procède à un nouveau tirage dans les mêmes conditions. La partie s'arrête impérativement après le troisième tirage.(Elle peut donc comporter 1, 2 ou 3 tirages.)

1. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au premier tirage ?
2. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au deuxième tirage ?
3. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne au troisième tirage ?
4. Quelle est la probabilité pour que le joueur n'ait rien gagné à la fin de la partie ?

EXERCICE 4 :

Une Urne contient deux boules rouges, trois boules noires et cinq boules blanches

A. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   1. Deux boules blanches.
   2. Deux boules de même couleur.
   3. Deux boules de couleurs différentes ?

B. Un joueur répète quatre fois l'épreuve précédente ; les boules tirées sont remises dans l'urne après chaque tirage et les tirages successifs sont indépendants. Le joueur gagne 1 point chaque fois qu'il tire deux boules blanches.
   Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain du joueur à l'issu des quatre tirages.
   1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   2. Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart type σ(X).
   3. Définir la fonction de répartition F de X et représenter F dans un repère.