MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0$$

1) a. Déterminer le réel α tel que αi soit solution de (E).
   b. Déterminer les réels a et b tel que, pour tout nombre complexe z, on a :
   $$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - \alpha i)(z^2 + az + b)$$
2) a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') = z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$
   b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.
3) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses et z_C son affixe.

a) Représenter A, B et C.
b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
c) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle BAC.

Exercice 2 :

On considère le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 4 cm.

1) Soit (E) l'équation : $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2z + 4) = 0$
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
   b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions.
2)
   a) Placer dans le plan P les points $A(-1 + i\sqrt{3})$; $B(-1 - i\sqrt{3})$; $C(\sqrt{3} - i)$ et $D(\sqrt{3} + i)$
   b) Soit $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$. Calculer Z, son module et son argument.

   En déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que AC = BD.
3) Pour tout entier n, on note A_n le point d'affixe $a_n = \frac{a}{2^n} e^{\frac{2\pi i n}{3}}$; avec $a = z_A$.
   a) Calculer a_1, a_2 et a_3 et placer les points A_1, A_2 et A_3.
   b) On pose $r_n = |a_n|$
      - Calculer r_n en fonction de n.
      - En déduire que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
      - Calculer $L_n = OA_0 + OA_1 + \cdots + OA_n$ en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (L_n) pour n tendant vers $+\infty$?

Exercice 3 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B et C sont les points d'affixes respectives i; $-i$ et $-3i$.

A tout point $M(z), z \neq -3i$, on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{3iz-1}{z+3i}$

1) Déterminer les points M pour lesquels $M' = M$.
2) Montrer que pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a: $\frac{z'+i}{z'-i} = 2\frac{z+i}{z-i}$
3) Soit (E) l'ensemble des points M tels que $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}$
   a) Déterminer et construire (E). Vérifier que C appartient à (E).
   b) Montrer, en utilisant 2, que si M appartient à $(E) - \{C\}$, alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 4 :

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points $A(-1)$ et $B(i)$.

Soit f l'application de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que : $Z = \frac{i_z+1}{z+1}$

1.
   a) Soit E le point d'affixe $-1+i$. Déterminer $f(E)$.
   b) Déterminer le point M de $P \setminus \{A\}$ tel que $f(M) = 0$
2. Donner une interprétation géométrique des arguments de $(z-i)$ et de $(z+1)$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de Z.
3. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points $M(z)$ tel que Z soit réel.

Exercice 5 :

On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{2}(1+i)$

1.
   a) Déterminer le module et un argument de z.
   b) Déterminer en fonction de n le module et un argument de z^n où n est un entier naturel non nul.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique = 8cm), on désigne par P_1 le point d'affixe z et par P_n le point d'affixe z^n.
   a) Déterminer les formes algébriques des nombres complexes z^n pour les valeurs de n telles que $1 \leq n \leq 6$.
   b) Représenter dans le plan complexe les six points P_n obtenus.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et (U_n) la suite définie par : $U_n = |z_n|$
   a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
   b) Déterminer le plus petit entier p tel que $|zP| < \frac{1}{1000}$.

4.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'argument du nombre $\frac{z^n}{z}$, montrer que les points P_n, O, P_1 sont alignés si et seulement si z^{n-1} est réel.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles P_n, O, P_1 sont alignés.

Exercice 6 :

Soit les nombres complexes :

$z_1 = -1 + i \ et \ z_2 = (\sqrt{3} - 1)i$

On appelle $A_1 \ et \ A_2$ les images des nombres complexes $z_1 \ et \ z_2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2cm)

1) Calculer l'affixe z_I du point I, milieu du segment $[A_1A_2]$.
Déterminer le module et un argument de z_I.

2) A tout nombre complexe z, la transformation r associe le point $M(z)$ au point $M'(z')$ telle que $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z$.

   a) Quelle est la nature de r ? Donner ses éléments caractéristiques.

   b) Déterminer z et z' pour que le quadrilatère A_1MA_2M' soit un parallélogramme.

Exercice 7 :

On considère les points $A(4 + 2i)B(-2 - i)$.

A tout point $M(z)$, $z \neq -2 - i$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$

1) Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg z'$.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

   a) est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

   b) est sur le cercle de centre O et de rayon 2.

   c) est réel strictement positif.

   d) est imaginaire pure, non nul.

Exercice 8 :

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que :

1) $|\bar{z} - 1 + i| = 2$

2) $|z - 1 - i| = |\bar{z} + 3 - 5i|$

3) $|2z - 6 + 4i| = 2$

4) $|(1 + i)z + 2i| = \sqrt{2}$

Exercice 9 :

Dans le plan orienté, on considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Soit I le milieu du segment [BC].

r_B est la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r_C est la rotation de centre C, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

$s = r_C \circ t \circ r_B$

1) a. Déterminer la nature de s.
   b. Quelle est l'image de B par s ?
   c. Caractériser la transformation s.
2) On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
   a) Déterminer les affixes des points A, B, C et I.
   b) Donner les expressions complexes de r_B, r_C et t.
   c) En déduire l'expression complexe de s.
   d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s.

Exercice 10 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la transformation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1)
   a) Trouver l'image de K par f et celle de J par g.
   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.
2)
   a) Préciser la nature de $g \circ f^{-1}$.
   b) Quelle est l'image de A par $g \circ f^{-1}$?
   c) En déduire l'élément caractéristique de $g \circ f^{-1}$.
   d) M est un point quelconque du plan, M_1 est l'image de M par f et M_2 l'image de M par g. Caractériser le quadrilatère ACM_2M_1.

Exercice 11 :

ABC est un triangle équilatéral direct $\left((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$.

r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

r_2 est la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$.

On pose $r = r_2 \circ r_1$.

D est le symétrique de C par rapport à la droite (AB). I est le milieu de [BD].

1) Déterminer $r(D)$, puis $r(B)$. En déduire $r(I)$.
2) Préciser, à l'aide de 1, la nature de r.
3) (C) est le cercle de diamètre [AD].
   a) Déterminer l'image de (C) par r_1, puis l'image de (C) par r.
   b) M est un point quelconque de (C). Construire les points N et M'. Prouver que les points M, N et M' sont alignés.

Exercice 12 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

r_1 est la rotation de centre A(0 ; 2) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r_2 est la rotation de centre B(-2 ; 0) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

s est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

1) En décomposant r_1 en deux symétries orthogonales judicieusement choisies ; déterminez la transformation $r_1 \circ s$.
2) Déterminez la transformation $s \circ r_2$.
3) On pose $f = r_1 \circ r_2$
   a) Quelle est la nature de f ?
   b) Précisez f. (on peut remarquer que $f = r_1 \circ s \circ s \circ r_2$)

Exercice 13 :

On désigne par S l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x' ; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 4 \end{cases}$$

1) On note z l'affixe du point M et z' celle de $M' = S(M)$.
   a) Exprimez z' en fonction de z.
   b) En déduire la nature de S.
2) Soit h l'homothétie de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, avec $\Omega(4 + 2i)$.
   a) Donnez l'écriture complexe de h, puis celle de $f = h \circ S$.
   b) Quelle est la nature de f ? Précisez f.
3) Soit $A(2)$ et $B'(6)$.
   a) Déterminez l'affixe du point $A' = S(A)$ et celle de B tel que $S(B) = B'$.
   b) Déterminez les réels α et β pour que Ω soit le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha)(A', \beta)(B, 1)(B', 2)\}$.

Exercice 14 :

Soit f et g les deux transformations définies par :

$f : z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} z$ et $g : z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

1) Précisez la nature de f et g et donnez leurs éléments caractéristiques.
2)
   a) Déterminez les expressions complexes de $f \circ g$ et $g \circ f$.
   b) Précisez et caractériser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 15 :

Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) des transformation(s) suivantes :

1. $f : z' = \frac{1}{2}[(-1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 3 + i\sqrt{3}]$
2. $f : z' = i\bar{z} + 1 - i$
3. $f : z' = -i\bar{z} + 2 - 4i$
4. $f : z' = (1 + i)\bar{z} + 2 - 8i$
5. $f : z' = 2i\bar{z} + 1 - 5i$
6. $f : z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1$
7. $f : z' = (-1 + i)z + 2 - 4i$

Exercice 16 :

1) Soit (D) la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.

Déterminer l'expression complexe de $s_{(D)}$, symétrie orthogonale d'axe (D).

2) Même exercice avec (D): $2x - y + 1 = 0$.

Exercice 17 :

Déterminer l'expression complexe de s.

1) s est la similitude plane directe telle que $s(A) = A$ et $s(B) = C$
$A(1 + i)$ $B(3 + i)$ et $C(3 + 3i)$
2) s est la solution de centre $\Omega(2)$ telle que $s(E) = F$ avec $E(5 + i)$ et $F(1 + 3i)$
3) s est la similitude plane directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 telle que $s(A) = B$ avec $A(-1 + i)$ et $B(3 - i)$.

Exercice 18 :

F est la transformation dont l'écriture complexe est $z' = u^2 z + u - 1, u \in \mathbb{C}$.

1) Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels :
   a) f est une translation
   b) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   c) f est une homothétie de rapport -4
2) On suppose que $u = 1 - i\sqrt{3}$.
   Déterminez alors la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Exercice 19 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(i)$.

Soit S_1 la similitude plane directe de centre A, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport 2.

Soit S_2 la similitude plane directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Donnez l'écriture complexe de S_1, puis celle de S_2.
2)
   a) Déduisez-en l'écriture complexe de $T = S_2 \circ S_1$.
   b) Quelle est la nature de T ? Précisez ses éléments caractéristiques.
   c) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ un autre point tel que $M' = (T(M)$. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

Exercice 20 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A. On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note A' le symétrique de A par rapport au point C.

1) Déterminez le rapport et l'angle de la similitude directe S qui transforme A' en C et C en B.
2) Quelle est la transformée de la droite (AC) par la similitude directe S ?
3) Soit Ω le centre de S.
   a) Démontrez que le triangle ΩCB est rectangle isocèle.
   b) Déduisez-en une construction de Ω.

Exercice 21 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ et AB = 4cm. On note D le symétrique de C par rapport à A.

S est la similitude plane directe telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$

1) Déterminez le rapport et l'angle de S.
2) Soit Ω le centre S.

   (C_1) l'ensemble des points M vérifiant $MB^2 - 2MA^2 = 0$ et (C_2) l'ensemble des points M vérifiant $MC^2 - 2MB^2 = 0$.

   a) Justifiez que les points D et Ω appartiennent à (C_1) et à (C_2).
   b) Soit E le barycentre des points $(A, -2)$ et $(B, 1)$ et F le barycentre de $(B, -2)$ et $(C, 1)$. Déterminer E et F.
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C_1) et (C_2).
   d) Construire Ω.

Exercice 22 :

ABCD est un carré direct de centre O, soit I le milieu de [BC]. h est l'homothétie de centre B et de rapport 2.

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose $S = r \circ h$.

1)
   a) Quelle est la nature de S ?
   b) Donnez le rapport et l'angle de S.
2)
   a) Déterminez $S(I)$ et $S(O)$.
   b) En déduire la nature des triangles ΩID et ΩOA. (Ω désigne le centre de S).
   c) Construis Ω.
3) En prenant le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$
   a) Déterminer les affixes des points A, B, C, D et O.
   b) Déterminer les expressions complexes de h, r et S.
   c) En déduire la nature de S et ses éléments caractéristiques.

Exercice 23 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $-3y' + 2y = 0$
2. $2y' + y = 3x - 1$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - \frac{1}{9}y = 0$
5. $y'' + y' - 2y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $y'' - 4y' + 5y = 0$
8. $y'' - 4y' + 3y = x^2 + 1$

Exercice 24 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + \frac{1}{4}y = 0$ et $y(0) = 2; y'(0) = 1$

2) $y'' + 3y' - 4y = 0$ et $y(0) = -2; y'(0) = 3$

Exercice 25 :

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' - 3y = (-4x + 2)e^{-x}$

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x - 1)e^{-x}$
   Vérifier que f est une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'' + 2y' - 3y = 0$
3)
   a) Montrer que : « g solution de (E) » équivaut à « $g - f$ solution de (E') »
   b) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 26 :

Démontrer par récurrence que :

1) $S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pour tout $n \geq 1$
2) $S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$, pour tout $n \geq 2$
3) $2^{3n+1} - 2$ est divisible par 7, pour tout $n \geq 0$
4) La suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est majorée par 2. (c'est-à-dire $U_n \leq 2$), puis montrer que (U_n) est croissante. Calculer la limite de U_n.

Exercice 27 :

$$I_n = \int_1^e x(\ln x)^x dx, x \in \mathbb{N}, I_0 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

1) Montrer que (I_n) est décroissante.
2) Montrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n$.

Exercice 28 :

1)
   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
   b) En déduire que la somme $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
2) On pose $T_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$
   a) Exprimer T_n en fonction de n.
   b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} T_n$

Exercice 29

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{12 - U_n} (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Calculer $U_{n+1} - 3$ en fonction de U_n.
2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

3) En déduire que pour tout $n \geq 1, |U_n - 3| \leq \frac{1}{3}n - 1$
4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 30 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} U_n \end{cases} et \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = V_n + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

Exercice 31 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.
2) On pose $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
   a) Exprimer V_n en fonction de n.
   b) En déduire que, pour tout $n \geq 2, on\ a: V_n \leq \frac{2}{3}$
   c) En déduire le sens de variation de (U_n), pour tout $n \geq 2$.
3)
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ puis $U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{9}{2}\right)$
   b) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 32 :

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{U_n+2} \end{cases}$

1) Soit f la fonction définie pour tout x de $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
   a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Etudier le sens de variation de f.
   c) Déterminer l'image de $[0\ ;\ 1]$ par f.
2) Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $[0\ ;\ 1]$.
4) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha| \ et\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 33 :

1) Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.
2) Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6.
3) Montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

4) Montrer que $-3^{n+3} + 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 34 :

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $4x - 3y = 0$
2. $5x + 8y = 1$
3. $66x + 3 \circ y = 42$
4. $6x - 7y = 4$

Exercice 35 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $\dot{3}x = \dot{1}$ b) $x^2 + \dot{3}x + 3 = 0$ c) $\dot{3}x^2 = -\dot{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} \dot{3}\dot{x} + \dot{4}y = \dot{7} \\ \dot{4}x + \dot{3}y = \dot{3} \end{cases}$$

Exercice 36 :

1) Montrer que $4k + 3$ et $3k + 2$ sont premiers entre eux.
2)
   a) Montrer que $PGDC(5k + 1, 2k + 3) = 1$ ou 13.
   b) Pour quelles valeurs de k, $PGDC(5k + 1, 2k + 3) = 17$
3) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
   a) $PGDC\ (a, b) = 8\ et\ a + b = 64$
   b) $PGDC\ (a, b) = 6\ et\ ab = 1080$
   c) $PPCM(a, b) = 48\ et\ a.b = 192$
   d) $PPCM(a, b) = 280\ et\ PGDC(a, b) = 7$
4) On pose $m = PPCM(a, b)\ et\ d = PGDC(a, b)$

   Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $m + 10d = 142$

Exercice 37 :

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 8.
2)
   a) Déterminer les entiers naturels pairs tels que $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8.
   b) Déterminer les entiers naturels impairs tels que $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8.

Exercice 38 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $3b - 8a = 0$
2) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $3b - 8a = 1$
3) Un entier naturel N s'écrit $\overline{boa}$ en base 5 et $\overline{abc}$ en base 7.

   Déterminer a, b et c et écrire N en base 10.

Exercice 39 :

1) Pour quelles valeurs de n, $512^n + 8^n$ est-il divisible par 5.
2) En base 9, trouver tous les couples (x, y) pour lesquels le nombre $\overline{7x6y4}$ soit divisible par 7 et 8.
3) n est un entier supérieur à 1, on pose $A = n - 1\ et\ B = n^2 - 3n + 6$.
   a) Montrer que $PGDC(A, B) = PGDC(A, 4)$.

b) Pour quelles valeurs de n, $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier ?

4) Pour quelles valeurs de n, $5^{2n}+5^n$ est-il divisible par 13 ?

Exercice 40 :

Dans un système à base n, on a : $\overline{146} \times \overline{57} = \overline{8686}$

1) Montrer que $n|36$
2) En déduire la valeur de n.

Exercice 41 :

Une boîte B contient 8 jetons dont 5 noirs et 3 blancs.

1) On tire successivement 4 jetons sans remettre dans la boîte B chaque jeton tiré. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Obtenir exactement 3 jetons noirs. »
B : « Obtenir au moins un jeton blanc. »
C : « Obtenir 2 jetons blancs aux 2 premiers tirages et seulement au 2 premiers tirages. »
2) On tire simultanément 4 jetons de la boîte B. On désigne par X la variable aléatoire au nombre de jetons blancs tirés.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et $F(X)$.
   c) Définir et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 42 :

Une urne contient 6 boules dont 2 portent le n°1 et 4 portent le n°0.

I. On tire successivement 5 boules en remettant dans l'urne chaque boule tirée. On note X la variable aléatoire qui totalise le nombre de boule n°1 tirée.
   1) Calculer $p(X=0)$ et $p(X=1)$.
   2) Donner la loi de probabilité de X.
   3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   4) Calculer $P(X \geq 2)$

II. On tire successivement n boules en remettant dans l'urne chaque boule tirée. On note A_n l'évènement : « Obtenir au moins une boule n°1 pendant les n tirages. » $(n \in \mathbb{N})$
   1) Calculer $p(A_n)$.
   2) Déterminer les valeurs de n pour que : $p(A_n) \geq 0{,}99$.

Exercice 43 :

On dispose d'un dé cubique dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. Le dé est pipé de telle sorte que :

$$\begin{cases} p_3 = p_5 \\ p_6 = 2p_4 = 8p_1 \\ p_2 + p_3 = p_6 \end{cases}$$

1) Calculer p_k pour $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements, si on lance une fois le dé :

A : « Obtenir un nombre impair »

B : « Obtenir un nombre inférieur à 3 »

C : « Obtenir un nombre divisible par 3 »

3) On lance 3 fois de suite ce dé. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : « Obtenir dans l'ordre la face n°1, la face n°3 et la face n°6. »

F : « Le produit des numéros obtenus est 2. »

Exercice 44 :

Voici la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

x	$]-\infty;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;+\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	1

1) Représenter graphiquement F.
2) Etablir la loi de probabilité de X.
3) Calculer la variance de X.

Exercice 45 :

Une urne contient 6 boules dont 2 blanches et 4 noires.

On tire successivement 2 boules sans remettre dans l'urne chaque boule tirée. On considère les évènements suivants :

A : « Obtenir une boule blanche au premier tirage. »

B : « Obtenir une boule blanche au deuxième tirage. »

1) Calculer $p(A)$.
2)
   a) Calculer $p(B/_A)$.
   b) Calculer $p(B)$.

Exercice 46 :

Pendant 8 jours, on a enregistré dans le tableau suivant le nombre d'élèves en retards et le nombre d'élèves absents chaque jour.

Nombre d'élèves en retard	4	6	7	10	10	12	16	20
Nombre d'élèves absents	3	5	5	8	7	6	13	14

1) Représenter le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthonormé ;
   - Sur l'axe des abscisses, placer 3 à l'origine et 0,5 cm pour l'unité.
   - Sur l'axe des ordonnées, placer 2 à l'origine et 0,5 cm pour l'unité.
2)
   a) Calculer les coordonnées du point moyen G.
   b) Donner l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées.
3) Calculer le coefficient de corrélation r. Interpréter ce résultat.
4) Le 9ème jour, on a relevé 16 élèves absents. Estimer à partir de la droite des moindres carrées le nombre d'élèves en n retard.