Exercice 47 :

Le tableau suivant représente le nombre de jours de pluie et le nombre d'heures d'ensoleillement d'une ville A pendant les 9 premiers mois.

	J	F	M	A	M	J	J	A	S
Jours de pluie x_i	7	6	11	8	α	3	0	4	9
Heures y_i	125	186	β	255	332	371	407	306	275

1)
   a) Sachant que $\overline{y} = 269$. Calculer β.
   b) Sachant que l'équation de la droite de régression (D) de y en x est $y = -21{,}44x + 397{,}64$. Calculer $\overline{x}$ puis α.
2) On donne $r = -0{,}74$.
   Déterminer l'équation de la droite de régression (D') de x en y.
3) Représenter (D) et (D').

Exercice 48 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x\ln(-x) \text{ si } x < 0 \\ \frac{e^x}{x+2} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
2)
   a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Etudier les branches infinies de (C).
3)
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Construire (C). (préciser les demi-tangentes au point A d'abscisse 0).
5) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = -\frac{1}{e}$
6) Soit $I = [0,1]$
   a) Pour x de I, calculer $f''(x)$
   b) En déduire que, pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha, \alpha \in I$
7) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$; $U_n \in I$.
   b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$.
   c) En déduire que : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 49 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ $par: f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1) Calculer les limites aux bornes de Df.
2) Etudier les branches infinies de (C), courbe représentant f dans le repère orthonormé d'unité 3 cm.
3)
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer (C).
5) λ désigne un réel strictement positif.
   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_\lambda = \int_\lambda^1 \ln x dx$.
   b) En déduire $A_\lambda = \int_\lambda^1 f(x)dx$.
   c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A_\lambda$

Exercice 50 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln|x+1|}{x+1} - x$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1)
   a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de Df.
   c) Montrer que le point $I(-1;1)$ est le centre de symétrie de (C).
2) Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$
   a) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   b) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1;+\infty[$
3)
   a) Montrer que pour tout $x > -1$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4)
   a) Montrer que $(D): y = -x$ est une asymptote à (C).
   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D), pour $x > -1$.
5) Tracer (D) et (C).
6) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des ordonnées, la droite (D) et la droite d'équation $x = \frac{1}{e} - 1$.