MATHEMATIQUES – Sujet-Type N° I

Durée : 2 h 15 mn | Coefficients : $A_1 = 1$; $A_2 = 3$

Exercice 1 :

I. (U_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$U_n = 1 - 3n$

1 -a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$U_{n+1} = U_n - 3$

b) En déduire la nature de la suite (U_n). Préciser son premier terme et sa raison.

2 -Soit S_n la somme définie par :

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Exprimer S_n en fonction de n.

II. Soit la suite (V_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$V_n = e^{1-3n}$

1 -Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2 -Quel est le sens de variation de (V_n) ?

3 -Calculer $\lim_{n \to +\infty} V_n$

Exercice 2 :

Une urne contient 10 boules dont 2 noires, 3 blanches, 4 rouges et 1 jaune.

On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.

1 -Déterminer le nombre de cas possibles.

2 -Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir 4 boules de même couleur ».

B : « Obtenir 4 boules de couleur deux à deux différentes ».

C : « Obtenir exactement deux boules rouges ».

D : « Obtenir 1 boule blanche, deux noires et 1 rouge dans cet ordre ».

E : « Obtenir au plus une boule rouge ».

Problème :

On considère la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = \frac{1-2\ln x}{x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1 -a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2-a) Montrer que, pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3- Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point A que l'on déterminera.

4- Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point B d'abscisse 1.

Ecrire une équation cartésienne de (T).

5- Tracer (T) et (C).

Pour A_2 seulement :

6- Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (\ln x)^2$

a) Calculer $g'(x)$. En déduire une primitive F de f.

b) Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \sqrt{e}$ et $x = e$